ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А. А. ЖДАНОВА

Б. З. ВУЛИХ, З. Д. КОЛОМОЙЦЕВА, Г. П. САФРОНОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Числовые ряды. Интегральное исчисление для функций одной переменной. Функциональные ряды

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ЗАОЧНИКОВ

Под редакцией Б. З. Вулиха

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА 1970

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

Данная книга представляет собой первую часть учебного пособия для заочников, выпускаемого кафедрой математического анализа Ленинградского университета. Сюда включен материал, составляющий содержание 2-го семестра I курса.

Изложение теории сопровождается большим количеством примеров и задач, приведенных с подробными решениями. Различные указания, даваемые по ходу решений, должны в какой-то степени заменить студенту-заочнику отсутствие постоянного контакта с преподавателем. По-новому, в сравнении с существующими учебниками, строится изложение определенного интеграла и его приложений. Это изложение следует рассматривать как пропедевтическое перед общим построением теории интеграла (по Лебегу), даваемым в более поздних частях курса. В книге содержится большое количество упражнений для самостоятельной работы заочников.

Книга предназначается в качестве учебного пособия для студентов-заочников математико-механических факультетов университетов.

Борис Захарович Вулих, Зоя Дмитриевна Коломойцева,
Галина Петровна Сафронова

Математический анализ

Редактор *З. И. Царькова*

Техн. редактор *Е. Г. Учаева* Корректор *В. А. Комлева*

М-10146 Сдано в набор 12/III 1970 г. Подписано к печати 29/VII 1970 г.

Формат бум. $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 2.

Уч.-изд. л. 11,82 Печ. л. 13,25. Бум. л. 6,62.
Заказ 598 Цена 43 коп. Тираж 17 670 экз.
Издательство ЛГУ им. А. А. Жданова

Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10

2-2-3
49-70

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — первый выпуск из серии учебных пособий по курсу математического анализа для заочников, подготовляемых кафедрой математического анализа Ленинградского университета. Сюда включен материал, изучаемый заочниками во 2-м семестре I курса. При этом предполагается, что предыдущий материал, составляющий содержание 1-го семестра (пределы, непрерывность функций и дифференциальное исчисление для функций одной переменной), заочники изучили по учебнику Г. М. Фихтенгольца.

Изложение определенного интеграла строится в этой книге совершенно иначе, чем у Г. М. Фихтенгольца. Это изложение рассматривается как пропедевтическое перед той общей теорией интеграла, которая содержится в более поздних частях курса математического анализа. Поэтому мы ограничиваемся здесь совсем элементарным изучением интеграла от непрерывных и кусочно-непрерывных функций. По другой схеме, по сравнению с учебником Г. М. Фихтенгольца, излагаются и приложения определенного интеграла.* Остальные главы этой книги не содержат принципиальных отличий от соответствующих глав учебника Г. М. Фихтенгольца. Однако авторы считали необходимым собрать в одной книге, хотя бы в минимальном объеме, весь материал 2-го семестра. Заметим попутно, что главы, посвященные числовым и функциональным рядам, отделены в этой книге друг от друга главами, посвященными интегральному исчислению, в связи с тем, что несобственные интегралы (входящие в главу III) естественно изучать после числовых рядов.

Настоящее пособие следует рассматривать как первый источник, по которому студент-заочник изучает материал 2-го семестра. В то же время мы настоятельно рекомендуем студентам не ограничиваться чтением только этой книги, а расширить свои знания предмета с помощью существующих распространенных учебников, в первую очередь — учебника Г. М. Фихтенгольца. В частности, мы особенно рекомендуем более подробное изучение теории рядов как числовых, так и функциональных.

---

* Основная идея применяемой здесь схемы приложений определенного интеграла заимствована из лекций Г. П. Акилова.

В нашей книге содержится некоторое количество упражнений. Часть из них приведена с подробными решениями, часть дана для самостоятельной работы студентов. Эти упражнения следует считать тоже лишь материалом для начала занятий. Помимо них мы рекомендуем студентам разобрать все примеры, приведенные с решениями в учебнике Г. М. Фихтенгольца, а также заняться самостоятельным решением задач из задачника по математическому анализу Б. П. Демидовича.

В последующем тексте при ссылках на учебник Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа» мы обозначаем его [Ф].

Главы I и V написаны Г. П. Сафроновой, главы III и IV, а также начало главы II — Б. З. Вулихом, остальная часть главы II — З. Д. Коломойцевой; ею же подобраны в основном упражнения и по другим главам. Окончательное редактирование книги проводилось при тесном взаимном контакте всех авторов.

Авторы искренне благодарят И. Я. Бакельмана и М. З. Соломяка за ряд замечаний, способствовавших улучшению книги.

ГЛАВА I

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. Основные понятия и свойства

В настоящей главе приводятся основные сведения из теории бесконечных рядов. Значение бесконечных рядов для современной математики очень велико, они широко используются в различных математических исследованиях. Поэтому в курсе математического анализа теория бесконечных рядов занимает одно из центральных мест.

Само понятие бесконечного ряда по существу не является принципиально новым, бесконечный ряд представляет собою лишь своеобразную форму числовой последовательности. Однако эта новая форма имеет некоторые особенности, благодаря которым применение рядов во многих случаях более удобно.

Пусть имеется последовательность чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Напишем следующее выражение:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Это выражение лишено какого-либо смысла, так как операция сложения бесконечного множества чисел непосредственно невыполнима. Поэтому оно представляет собой некий символ, который мы и называем *бесконечным рядом* или просто рядом. Для обозначения ряда используется также и краткая форма записи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Числа a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ называются *членами* ряда. Если известен закон, по которому для каждого n можно найти a_n, то ряд считается заданным.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

и постараемся придать ему числовой смысл. Будем складывать подряд члены ряда, начиная с первого. Результат, полученный от сложения первых m членов, называется *m-й частичной суммой ряда* (1)

$$A_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m = \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

Так как m может быть любым натуральным числом, то частичные суммы образуют числовую последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Конечный или равный бесконечности определенного знака предел последовательности частичных сумм называется *суммой* ряда.

Из определения следует, что сумма ряда не обязательно существует. В этом состоит основное отличие бесконечных рядов от конечных сумм: у любой конечной совокупности чисел обязательно существует сумма, «сложить» же бесконечное множество чисел оказывается по существу далеко не всегда возможным.

С этой точки зрения ряды, имеющие конечную сумму, представляют наибольший интерес. Поэтому множество всех рядов подразделяется на два класса:

1) ряды, имеющие конечную сумму; такие ряды называются *сходящимися*;

2) ряды, имеющие бесконечную сумму или вообще не имеющие суммы; такие ряды называются *расходящимися*.

Если ряд сходится и сумма его есть A, то говорят, что он сходится к сумме A и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A.$$

Если же ряд имеет бесконечную сумму, то иногда употребляют выражение «ряд расходится к плюс или минус бесконечности» и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm \infty.$$

На приведенных ниже примерах мы убедимся, что оба класса рядов не пусты, а внутри класса расходящихся рядов существуют как ряды, не имеющие суммы, так и ряды с бесконечной суммой.

1. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ расходится (не имеет суммы). Действительно, частичные суммы этого ряда

$$A_n = \begin{cases} 0 \text{ при } n \text{ четном}, \\ 1 \text{ при } n \text{ нечетном} \end{cases}$$

и последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится к $+\infty$. Действительно, для частичных сумм этого ряда справедливо неравенство

$$A_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

и $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

3. Геометрическая прогрессия

$$a + aq + aq^2 + \cdots \quad (a \neq 0)$$

сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$. Действительно, при $q \neq 1$ частичные суммы этого ряда имеют вид

$$A_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Так как при $|q| < 1$ существует

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{a}{1-q},$$

то ряд в этом случае сходится и имеет место равенство

$$a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1-q}.$$

Если же $|q| > 1$, то $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ и ряд расходится. При этом для положительных значений q $(q > 1)$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \pm\infty$$

(в зависимости от знака a) и ряд имеет сумму $\pm\infty$. В случае отрицательных значений q $(q < -1)$ ряд не имеет суммы. При $q = -1$ мы получаем ряд $a - a + a - a + \cdots$, аналогичный ряду из примера 1, следовательно, в этом случае ряд расходится, так как не имеет суммы. Наконец, при $q = 1$ имеем ряд $a + a + a + \cdots$ и, так как его частичная сумма $A_n = na$, этот ряд расходится к $\pm\infty$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Здесь частичная сумма

$$A_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Ряд сходится к сумме 1.

Обратимся теперь к изучению основных свойств рядов. При этом мы по-прежнему будем обозначать частичные суммы ряда (1) через A_n, а его сумму через A. Кроме того, введем еще одно новое понятие.

Назовем *остатком* ряда (1) после m-го члена ряд, полученный из (1) в результате отбрасывания первых m членов, т. е. ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots \tag{2}$$

1°. *Пусть ряд (1) сходится. Тогда его общий член a_n стремится к нулю, т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Действительно, $a_n = A_n - A_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Переходя здесь к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A - A = 0.$$

Отсюда, в частности, снова вытекает расходимость ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Действительно, допустив, что он сходится, мы на основании доказанного имели бы $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = 0$, что неверно.

Доказанный результат необратим: из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ сходимость ряда не вытекает. Это можно видеть на примере ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (см. пример 2). Поэтому стремление к нулю общего члена является лишь необходимым, но недостаточным условием сходимости ряда. В частности, если это необходимое условие нарушено, то ряд расходится.

Рассмотрим, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n.$$

Имеем

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \left[\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-2n}\right]^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{1}{2}};$$

таким образом, $a_n \not\to 0$. Поэтому данный ряд расходится.

2°. *При любом фиксированном m ряды (1) и (2) одновременно сходятся или нет. Иначе говоря, отбрасывание конечного числа первых членов ряда не отражается на его сходимости.*

Для доказательства этого утверждения обозначим частичные суммы ряда (2) (m фиксировано) через A'_p. Ясно, что

$$A'_p = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+p} = A_{m+p} - A_m. \tag{3}$$

Если $p = 1, 2, \ldots$, то $m + p = m + 1, m + 2, \ldots$. Поэтому из данного равенства следует, что последовательности $\{A'_p\}_{p=1}^{\infty}$

и $\{A_n\}_{n=m+1}^{\infty}$, а стало быть, и последовательности $\{A'_p\}_{p=1}^{\infty}$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют конечные пределы только одновременно.

3°. Пусть ряд (1) сходится. Тогда при всяком m сходится ряд (2), и мы положим

$$\alpha_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k.$$

При этом $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = 0$, т. е. *сумма остатка сходящегося ряда стремится к нулю при неограниченном увеличении номера последнего отброшенного члена.*

Действительно, переходя в (3) к пределу при $p \to \infty$, мы получим

$$\alpha_m = A - A_m.$$

Это равенство справедливо при любом натуральном m, а так как $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A$, то все доказано.

4°. Принцип сходимости Больцано — Коши имеет для рядов следующий вид:

Для того чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое N, чтобы для всех $n > N$ и $p > 0$ (n, p — натуральные) было

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Действительно, сходимость ряда (1) означает сходимость последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ его частичных сумм. Для сходимости этой последовательности необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовало такое N, что при всех m, $n > N$

$$|A_m - A_n| < \varepsilon.$$

Считая для определенности $m > n$ и полагая $m - n = p$, получим

$$A_m - A_n = A_{n+p} - A_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k,$$

откуда и вытекает требуемое.

Сейчас мы установим некоторые правила действий над сходящимися рядами.

5°. *Если все члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то сходимость его не нарушится, а сумма его умножится на то же число.*

Действительно, рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$ и обозначим через C_n его частичную сумму. Ясно, что $C_n = cA_n$. Поэтому существует конечный предел $C = \lim\limits_{n\to\infty} C_n$ и имеет место равенство $C = cA$.

6°. *Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать.* Это свойство означает, что из сходимости двух рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$. Кроме того, если суммы этих рядов обозначить соответственно через A, B, C, то имеет место равенство $C = A \pm B$.

Для доказательства этого равенства обозначим частичные суммы наших рядов соответственно через A_n, B_n, C_n. Ясно, что $C_n = A_n \pm B_n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, то существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = A \pm B$. Отсюда следует как сходимость третьего ряда, так и равенство $C = A \pm B$.

Нетрудно видеть, что из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ (или $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$) сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ не вытекает. Действительно, в результате почленного сложения расходящихся рядов $1 + 1 + 1 + \cdots$ и $-1 - 1 - 1 - \cdots$ мы получим сходящийся ряд $0 + 0 + 0 + \cdots$.

Это обстоятельство необходимо иметь в виду при операциях с рядами.

7°. Сочетательное свойство сходящихся рядов.

Если члены сходящегося ряда, не меняя их порядка, объединить в группы, то получающийся при этом ряд также сходится и сумма его совпадает с суммой исходного ряда.

Действительно, расставляя скобки в ряду (1), получим ряд

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) +$$
$$+ (a_{k_2+1} + \cdots + a_{k_3}) + \cdots$$

Пусть A'_m есть его частичная сумма. Ясно, что

$$A'_m = (a_1 + \ldots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2}) + \ldots +$$
$$+ (a_{k_{m-1}+1} + \ldots + a_{k_m}) = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_m} = A_{k_m}.$$

Так как $\{A_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ есть подпоследовательность последовательности частичных сумм ряда (1), то она сходится к A. Следовательно, ряд (4) тоже сходится и сумма его также равна A.

Это свойство необратимо: раскрытие скобок в сходящемся ряду может привести к расходящемуся ряду. Это видно на примере ряда $(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$, который сходится, так как каждый его член равен нулю. В то же время, раскрыв скобки, мы получим расходящийся ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

§ 2. Положительные ряды

В предыдущем параграфе мы рассмотрели несколько примеров, в которых в результате тех или иных несложных преобразований удалось найти компактное выражение для частичной суммы A_n, а тогда вопрос о существовании и нахождении $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ уже не представлял значительных трудностей. Таким образом, одновременно с установлением сходимости ряда (в тех случаях, когда она имела место) всякий раз было найдено и значение суммы ряда. Однако в общем случае непосредственно судить о существовании $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ далеко не так легко. Основную трудность представляет здесь нахождение компактного выражения для частичной суммы A_n. Кроме того, во многих случаях гораздо важнее оказывается установить сходимость данного ряда, нежели знать величину его суммы. Для некоторых рядов даже сумму удается найти лишь после установления сходимости. Поэтому при операциях с рядами на первое место встает вопрос об их сходимости.

Мы уже упомянули, что при решении вопроса о сходимости непосредственное применение определения, как правило, затруднительно. Неудобным для практического применения является и сформулированное в 4° (§ 1) необходимое и достаточное условие сходимости ряда. При его применении мы снова сталкиваемся с необходимостью вычисления суммы произвольного числа членов ряда. Простым и удобным для применения является условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Однако это условие только необходимо, и, основываясь на нем, можно лишь установить расходимость тех рядов, для которых оно не выполнено.

В дальнейшем мы рассмотрим несколько достаточных признаков сходимости рядов. С помощью этих признаков сходимость или расходимость ряда может быть установлена лишь на основании поведения его общего члена. Само собой разумеется, что ни один из них не может быть применим ко всей совокупности рядов вообще.

Наиболее простыми для изучения оказываются такие ряды, все члены которых имеют один и тот же знак. Так как умножение всех членов ряда на -1 не отразится на его сходимости, то достаточно рассмотреть только такие ряды, все члены которых положительны.

Ряд (1) называется *положительным*, если $a_n \geqslant 0$ при всех n. Если же $a_n > 0$ при всех n, то ряд называется *строго положительным*.

Пусть ряд (1) положительный. Тогда из равенства

$$A_n = A_{n-1} + a_n \quad (n = 2,\ 3,\ \ldots)$$

следует, что его частичные суммы образуют возрастающую последовательность. Поэтому на основании теоремы о пределе монотонной последовательности всегда существует $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, конечный или равный $+\infty$. Иначе говоря, *положительный ряд всегда имеет сумму*.

Пользуясь той же теоремой, мы можем теперь сформулировать условие сходимости положительного ряда.

*Для того чтобы положительный ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.**

Действительно, сходимость ряда означает существование конечной суммы, последнее же обстоятельство имеет место лишь при условии, что последовательность частичных сумм ограничена сверху.

С помощью этого условия могут быть получены достаточные признаки сходимости; некоторые из них мы приводим ниже.

§ 3. Теоремы сравнения

В этом параграфе мы приведем два признака сходимости положительных рядов, основанные на сравнении рядов между собой.

Теорема 1. *Пусть ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{5}$$

положительны, и существует такое N, что при всех $n > N$

$$a_n \leqslant b_n. \tag{6}$$

Тогда из сходимости ряда (5) вытекает сходимость ряда (4), и наоборот — из расходимости ряда (4) вытекает расходимость ряда (5).

Если члены положительных рядов (4) и (5) удовлетворяют неравенству (6) (хотя бы при $n > N$, т. е. начиная с некоторого члена), то ряд (5) называется *мажорантным* по отношению к ряду (4), а ряд (4) — *минорантным* по отношению к ряду (5). В несколько измененной форме эти термины переносятся и на ряды с любыми членами (неположительные).

Теперь теорему 1 можно сформулировать так: *из сходимости мажорантного ряда вытекает сходимость минорантного; расходимость минорантного ряда влечет за собой расходимость мажорантного.*

---

* Впрочем, поскольку для положительного ряда все $A_n \geqslant 0$, последовательность его частичных сумм всегда ограничена снизу. Поэтому в формулировке необходимого и достаточного условия сходимости положительного ряда можно говорить просто об ограниченности частичных сумм.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Не умаляя общности, можно считать, что неравенство (6) имеет место при всех n, так как вместо рядов (4) и (5) можно рассматривать их остатки после N-го члена.

Из условия сходимости ряда (5) вытекает ограниченность сверху последовательности $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ его частичных сумм. Тогда то же верно и в отношении последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда (4), ибо

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_n = B_n.$$

Поэтому ряд (4) сходится.

Если же ряд (4) расходится, то, предполагая сходимость ряда (5), мы на основании уже доказанной части теоремы придем к противоречию. Следовательно, теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть ряды* (4) *и* (5) *строго положительны и существует предел*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

(ясно, что $0 \leqslant L \leqslant +\infty$).

Если $L < +\infty$, *то сходимость ряда* (5) *влечет сходимость ряда* (4). *Если же* $L > 0$, *то из сходимости ряда* (4) *следует сходимость ряда* (5).

Пусть сначала L конечно. Тогда числовая последовательность $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Следовательно, существует такое число M, что $\frac{a_n}{b_n} \leqslant M$ при всех n. Тогда при всех n

$$a_n \leqslant M b_n. \tag{7}$$

Пусть теперь ряд (5) сходится. Тогда сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M b_n$, который на основании (7) является мажорантным по отношению к ряду (4). Следовательно, ряд (4) сходится.

Если $L > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < +\infty$, и второе утверждение теоремы вытекает из доказанного.

Из доказанной теоремы следует, что если $0 < L < +\infty$, то ряды (4) и (5) могут сходиться лишь одновременно.

С помощью доказанных теорем сходимость или расходимость ряда можно установить путем сравнения с уже известным рядом. Во многих случаях для такого сравнения оказывается удобным применять ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$. Мы будем называть такие ряды гармоническими, хотя чаще это название относят лишь к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. В дальнейшем (гл. III, § 8) будет весьма просто доказано, что *гармонические ряды сходятся при* $\alpha > 1$ *и расходятся при* $0 < \alpha \leqslant 1$. Это доказательство будет основано на применении так называемого интегрального признака сходимости рядов.* Однако уже в этой главе при решении примеров мы неоднократно воспользуемся сравнением данного ряда с гармоническим.

Приведем ряд примеров. В каждом из них требуется выяснить, сходится или нет данный ряд.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+5)}$.

При всех n очевидно неравенство

$$\frac{1}{(n+3)(n+5)} < \frac{1}{n^2}.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то мы можем применить теорему 1, рассматривая в качестве (4) ряд, данный нам в примере, в качестве (5) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Следовательно, данный ряд сходится.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Используем очевидное неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}.$$

Применим теорему 1, принимая в ней ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ за ряд (4), а данный ряд за ряд (5). Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ (т. е. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$) представляет собой остаток гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ после 1-го члена, то он расходится. Поэтому расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

* Впрочем, несколько сложнее указанный результат можно доказать и без интегрального признака ([Ф], II, стр. 16).

3. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\sqrt{n}}$.

Несмотря на наличие в выражении a_n множителя n, все же

$$a_n = ne^{-\sqrt{n}} = \frac{n}{e^{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

так как $e^{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ быстрее любой степени n. Таким образом, необходимое условие сходимости ряда выполнено. Однако это условие ведь не является достаточным.

Попробуем сравнить наш ряд с каким-нибудь сходящимся рядом, например с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ne^{-\sqrt{n}}}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{\sqrt{n}}} = 0. \qquad (8)$$

Следовательно, по второй теореме сравнения наш ряд тоже сходится.

Заметим, что если в равенстве (8) заменить $\frac{1}{n^2}$ в знаменателе на $\frac{1}{n}$, то это не отразится на величине предела. Однако в этом случае теорема 2 окажется неприменимой, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3n}$.

Если $n > 2$, то $\ln n > 1$, и потому при $n > 2$ имеет место неравенство

$$\frac{\ln n}{3n} > \frac{1}{3n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ расходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, а тогда по теореме 1 расходится и данный нам ряд.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3n^2}$.

Неравенство $\frac{\ln n}{3n^2} > \frac{1}{3n^2}$, справедливое при $n > 2$, ничего не дает, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2}$ сходится. Будем рассуждать иначе.

Так как $\frac{\ln n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при любом $\alpha > 0$, то существует такое N (зависящее от α), что при $n > N$

$$\frac{\ln n}{n^\alpha} < 1,$$

или $\ln n < n^\alpha$. Следовательно, для таких n $(n > N)$

$$\frac{\ln n}{3n^2} < \frac{n^\alpha}{3n^2} = \frac{1}{3n^{2-\alpha}}.$$

Теперь в качестве α достаточно взять любое число, меньшее единицы. Возьмем, например, $\alpha = \frac{1}{2}$; тогда $\frac{\ln n}{3n^2} < \frac{1}{3n^{3/2}}$ при $n > N$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^{3/2}}$ сходится, следовательно, на основании теоремы 1 сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3n^2}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 3n + 1000}{3n^5 + 2n + 17}$.

Ясно, что $a_n = \frac{5n^2 - 3n + 1000}{3n^5 + 2n + 17} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Выясним порядок малости величины a_n:

$$a_n = \frac{n^2\left(5 - \frac{3}{n} + \frac{1000}{n^2}\right)}{n^5\left(3 + \frac{2}{n^4} + \frac{17}{n^5}\right)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{5}{3n^3}.$$

Точнее, это значит, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{5}{3n^3}} = 1.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3n^3}$ сходится, то по теореме 2 сходится и рассматриваемый ряд.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2n\sqrt{n} + 1}{3n^2 + 2}\right)$.

Сразу заметим, что $a_n = 1 - \cos \frac{2n\sqrt{n} + 1}{3n^2 + 2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; выясним порядок малости этой величины.

Так как $\sin z \sim z$ при $z \to 0$, то

$$a_n = 2\sin^2 \frac{2n\sqrt{n}+1}{2(3n^2+2)} \sim 2\left[\frac{2n\sqrt{n}+1}{2(3n^2+2)}\right]^2 \sim 2\left(\frac{2n\sqrt{n}}{2\cdot 3n^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{9n}\left(\text{т. е. } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{2}{9}n} = 1\right);$$

но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9n}$ расходится, следовательно, по теореме 2, расходится и данный ряд.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{5} - \sqrt[n+1]{5}\right)$.

Прежде всего преобразуем общий член ряда

$$a_n = \sqrt[n]{5} - \sqrt[n+1]{5} = 5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{1}{n+1}} = 5^{\frac{1}{n+1}}\left(5^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} - 1\right) =$$

$$= 5^{\frac{1}{n+1}}\left(5^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right).$$

Ясно, что $a_n \to 0$, и мы опять выясним порядок малости a_n.

Известно, что

$$\lim_{z\to 0} \frac{a^z - 1}{z} = \ln a;$$

поэтому $a^z - 1 \sim z \ln a$ при $z \to 0$.

В нашем случае имеем

$$5^{\frac{1}{n+1}}\left(5^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)} \ln 5,$$

ибо $5^{\frac{1}{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Но $\frac{1}{n(n+1)} \ln 5 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln 5}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 5}{n^2}$ сходится, следовательно, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{n^{n+1}}$.

Преобразуем общий член ряда

$$a_n = \frac{(n-1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$, поэтому $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{ne}$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne}$ расходится, следовательно, расходится и данный ряд.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$.

Этот пример решается проще предыдущего. Так как $\ln n > 2$ при $n > 7$, то $\frac{1}{n^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$ при $n > 7$, и из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ вытекает сходимость данного ряда.

Приведем теперь несколько примеров другого типа. Именно в последующих примерах члены ряда зависят не только от n, но еще и от некоторого параметра p. Требуется выяснить, при каких значениях p ряд сходится, а при каких — расходится.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^p$ $(p > 0)$.

Так как $\sin \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$ при $n \to \infty$, то

$$\left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^p \sim \left(\frac{\pi}{n}\right)^p = \frac{\pi^p}{n^p}.$$

Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leqslant 1$. Следовательно, и данный ряд тоже сходится, если $p > 1$, и расходится при $p \leqslant 1$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \ln^p \frac{5n^2+7}{5n^2-3}$ $(p > 0)$.

Известно, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

откуда $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$. Заметив, что $\frac{5n^2+7}{5n^2-3} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$, представим эту дробь в следующем виде:

$$\frac{5n^2+7}{5n^2-3} = 1 + \frac{10}{5n^2-3}.$$

Так как $\frac{10}{5n^2-3} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, то

$$\ln \frac{5n^2+7}{5n^2-3} = \ln\left(1 + \frac{10}{5n^2-3}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{10}{5n^2-3} \sim \frac{10}{5n^2} = \frac{2}{n^2}.$$

Отсюда

$$a_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \cdot \frac{2^p}{n^{2p}} = \frac{2^p}{n^{2p+\frac{1}{5}}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^p}{n^{2p+\frac{1}{5}}}$ сходится при $2p+\frac{1}{5}>1$, т. е. при $p>\frac{2}{5}$, и расходится при $2p+\frac{1}{5}\leqslant 1$, т. е. при $p\leqslant\frac{2}{5}$. Следовательно, данный ряд сходится при $p>\frac{2}{5}$ и расходится при $p\leqslant\frac{2}{5}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2n}-\sin\frac{1}{2n}\right)^p$ $(p>0)$.

Преобразуем общий член ряда. Сначала рассмотрим разность $\operatorname{tg}\frac{1}{2n}-\sin\frac{1}{2n}$. Имеем

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2n}-\sin\frac{1}{2n}=\sin\frac{1}{2n}\cdot\frac{1-\cos\frac{1}{2n}}{\cos\frac{1}{2n}}=\frac{\sin\frac{1}{2n}2\sin^2\frac{1}{4n}}{\cos\frac{1}{2n}}.$$

Так как $\sin\frac{1}{2n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$, $\sin\frac{1}{4n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{4n}$, а $\cos\frac{1}{2n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$, то

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2n}-\sin\frac{1}{2n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{2n}2\left(\frac{1}{4n}\right)^2=\frac{1}{16n^3}.$$

Поэтому для общего члена данного ряда имеем

$$a_n\underset{n\to\infty}{\sim}n\frac{1}{16^pn^{3p}}=\frac{1}{16^p}\cdot\frac{1}{n^{3p-1}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16^p}\cdot\frac{1}{n^{3p-1}}$ сходится при $3p-1>1$, т. е. при $p>\frac{2}{3}$, и расходится при $3p-1\leqslant 1$, т. е. при $p\leqslant\frac{2}{3}$. Следовательно, данный ряд тоже сходится при $p>\frac{2}{3}$ и расходится при $p\leqslant\frac{2}{3}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)^p$ $(p>0)$.

Преобразуем общий член ряда

$$a_n=\left[\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)\,n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)\,n}+\sqrt[3]{n^2}}\right]^p=$$

$$=\frac{2^p}{\left[\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)\,n}+\sqrt[3]{n^2}\right]^p}=$$

$$=\frac{2^p}{n^{2/3p}\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+1\right]^p}\underset{n\to\infty}{\sim}\left(\frac{2}{3}\right)^p\frac{1}{n^{2/3p}}.$$

Следовательно, данный ряд сходится при $p > \frac{3}{2}$ и расходится при $p \leqslant \frac{3}{2}$.

Упражнения

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt[4]{n}}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - \sqrt[n+1]{2}\right)$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{2n^2-1}{5n^3+2}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{n} e^{-\sqrt[3]{n}}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{500n^3+3n+2}{5-2n+n^4\sqrt{n}}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\sin \frac{3}{n}} - 1\right)$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1\right)$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{2}{n}\right)^n$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n^3+1}{2n^3-1}$.

При каких значениях параметра p ($p > 0$) сходятся ряды:

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^p \frac{1}{n\sqrt{n}}$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{2n+1}{2n+3}$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{3n}\right)$.

§ 4. Признаки Коши и Даламбера *

В предыдущем параграфе были рассмотрены примеры рядов, для которых вопрос о сходимости решался в результате сравнения с одним из рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Если же вместо такого ряда взять геометрическую прогрессию, то сравнение можно провести в более общем виде. Результатом являются два приводимых ниже признака, известных под названием признаков Коши и Даламбера.

---

* Ж. Л. Даламбер (1717—1783) — французский математик.

Т е о р е м а 3 (п р и з н а к К о ш и). *Пусть ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{9}$$

положительный. Если существует такое число q $(0 < q < 1)$ *и такой номер* N, *что* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ *при всех* $n > N$, *то ряд* (9) *сходится; если же существует такое* N, *что* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ *при всех* $n > N$, *то ряд* (9) *расходится.*

Доказательство первого утверждения основано на первой теореме сравнения. Действительно, из неравенства $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ вытекает неравенство $a_n \leqslant q^n$, а так как геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ при $0 < q < 1$ сходится, то сходится и ряд (9).

Для доказательства второго утверждения отметим, что неравенство $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, выполненное при $n > N$, равносильно неравенству $a_n \geqslant 1$ $(n > N)$. Поэтому условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не может быть выполнено, и ряд (9) расходится.

Для практического применения более удобной оказывается следующая теорема, которая вытекает из только что доказанной.

Т е о р е м а 4 (п р и з н а к К о ш и в п р е д е л ь н о й ф о р м е). *Пусть существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. *Тогда, если* $l < 1$, *то ряд* (9) *сходится, если же* $l > 1$, *то он расходится.*

Действительно, в первом случае выберем $\varepsilon > 0$ так, что $l + \varepsilon < 1$. На основании определения предела последовательности существует такое N, что $\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$ при $n > N$. Поэтому сходимость ряда (9) вытекает из теоремы 3, так как в ней можно положить $q = l + \varepsilon$.

Пусть теперь $l > 1$. По свойству предела существует такое число N, что при $n > N$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} > 1$ и остается снова применить теорему 3.

Доказанная теорема не применима к рядам, для которых $l = 1$. В этом случае ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Предоставляя читателю самому убедиться в том, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

отметим только, что первый из приведенных рядов расходится, а второй сходится.

Для того чтобы решить вопрос о сходимости ряда в случае $l = 1$, необходимо привлекать какие-либо другие признаки.

Теорема 5 (признак Даламбера). *Пусть ряд (9) — строго положительный. Если существует такое число q $(0 < q < 1)$ и такой номер N, что при всех $n > N$ оказывается $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$, то ряд (9) сходится, если же существует такое N, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ при всех $n > N$, то он расходится.*

Доказательство. Рассмотрим сначала первый случай. Не умаляя общности, можно считать, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$ при всех n. В противном случае мы бы рассмотрели вместо данного ряда его остаток после N-го члена.

Выпишем $(n - 1)$ неравенств

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant q, \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant q, \ldots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant q$$

и перемножим их почленно. В результате получим неравенство

$$\frac{a_n}{a_1} \leqslant q^{n-1},$$

или $a_n \leqslant a_1 q^{n-1}$. Теперь из сходимости геометрической прогрессии $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots$ сразу вытекает сходимость данного ряда.

Во втором случае из неравенства $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ вытекает, что $a_{n+1} \geqslant a_n$. Отсюда следует, что $a_n \nrightarrow 0$, так как возрастающая последовательность положительных чисел не может стремиться к 0. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Рассуждая так же, как и при переходе от теоремы 3 к теореме 4, мы можем получить признак Даламбера в предельной форме.

Теорема 6. *Пусть существует $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Если $l < 1$, ряд (9) сходится, если же $l > 1$, то он расходится.*

Как и признак Коши, признак Даламбера не применим, если $l = 1$. Это подтверждается с помощью тех же двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, что и в случае признака Коши.

Приведем примеры.

1. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{9^n}$.

По признаку Даламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 9^n}{9^{n+1}n^2}=\frac{1}{9}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^5+3}{3n^5+4}\right)^n$.

При решении этого примера удобнее применить признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^5+3}{3n^5+4}=\frac{2}{3}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

3. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5+(-1)^n}{4^{n+1}}$.

Данный ряд мажорируется сходящейся геометрической прогрессией $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4^{n+1}}$ $\left(\text{ее знаменатель равен } \frac{1}{4}\right)$. Следовательно, по первой теореме сравнения он тоже сходится. Однако этот результат нам не удается получить с помощью признака Даламбера, так как для данного ряда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует, и потому признак Даламбера здесь не применим. Впрочем, признак Коши оказывается все же применимым к данному ряду, именно

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5+(-1)^n}{4^{n+1}}}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+(-1)^n}{4}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{4}<1,$$

откуда еще раз вытекает сходимость ряда.

Упражнения

Исследовать, сходятся ли следующие ряды:

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{3}{n}\right)^{n^3}$; **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^5\sin\frac{\pi}{3^n}$; **16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$.

§ 5. Абсолютная сходимость

Перейдем теперь к рассмотрению рядов, члены которых имеют разные знаки. При этом интерес представляют лишь те ряды, среди членов которых бесконечно много как положительных, так и отрицательных.

Действительно, допустим, что один из знаков, например минус, встречается лишь у конечного числа членов. Если k есть наибольший номер отрицательных членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{10}$$

то его остаток $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ уже является положительным рядом. В то же время сходимость ряда равносильна сходимости его остатка.

В этом параграфе мы рассмотрим один класс рядов, для которых вопрос о сходимости решается наиболее просто. Ряд (10) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 7. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Таким образом, *из абсолютной сходимости ряда (10) вытекает его сходимость в первоначальном смысле*, т. е. в том, как это было определено в § 1.

Доказательство. Пусть ряд (10) сходится абсолютно. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всех $m > N$ и всех p (m, p — натуральные)

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} |a_n| < \varepsilon.$$

Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ такое N найдено. Тогда при $m > N$ и любом p будем иметь

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{m+p} |a_n| < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то для ряда (10) выполнено необходимое и достаточное условие сходимости, и теорема доказана.

Обратная теорема не верна: существуют сходящиеся ряды, которые не сходятся абсолютно*. Пример такого ряда мы приведем в следующем параграфе.

Для установления сходимости (но не расходимости) рядов с произвольными членами могут использоваться признаки сходимости положительных рядов. Именно допустим, что с помощью одного из таких признаков установлена сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

---

* Иногда такие ряды называют условно сходящимися, но мы не считаем этот термин удачным.

Тогда сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает из доказанной теоремы. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ оказывается расходящимся, то вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ остается открытым.

Исключение представляют признаки Коши и Даламбера, так как эти признаки устанавливают расходимость ряда только за счет нарушения необходимого условия сходимости.

Приведем признак Даламбера в предельной форме для рядов с членами произвольных знаков.

Теорема 8. *Пусть ряд (10) таков, что* $a_n \neq 0$ *при всех* n *и существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$. *Тогда, если* $l < 1$, *ряд сходится, если* $l > 1$, *ряд расходится.*

Действительно, если $l < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, и можно сослаться на теорему 7. Если же $l > 1$, то, как было видно из доказательства признака Даламбера в § 4, отсюда следует, что $|a_n| \nrightarrow 0$, а тогда и $a_n \nrightarrow 0$, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Аналогично теореме 8 можно сформулировать и признак Коши.

В заключение отметим одно свойство абсолютно сходящихся рядов, сближающее их с конечными суммами. Абсолютно сходящиеся ряды обладают переместительным свойством. Иначе говоря, если произвольным образом изменить порядок членов абсолютно сходящегося ряда, не выбрасывая при этом ни одного члена, то полученный в результате этого ряд будет по-прежнему абсолютно сходящимся, а сумма его будет совпадать с суммой исходного ряда.

Доказательства этого факта мы здесь приводить не будем (см. [Ф], т. II, стр. 36). Отметим только, что для рядов, сходящихся не абсолютно, переместительное свойство не имеет места.

§ 6. Знакочередующиеся ряды

В этом параграфе мы рассмотрим один класс рядов, для которых вопрос о сходимости может быть решен вне связи с положительными рядами.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{11}$$

называется *знакочередующимся*, если любые два его соседних члена имеют разные знаки, т. е. $a_n a_{n+1} < 0$ ($n = 1, 2, \ldots$). Будем для определенности считать $a_1 > 0$, и введем обозначение $c_n = |a_n|$ ($n = 1, 2, \ldots$). Так как члены с нечетными номерами положительны, а с четными — отрицательны, то $a_n = (-1)^{n-1} c_n$ и ряд (11) можно переписать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - \ldots . \tag{12}$$

Из определения знакочередующегося ряда следует, что $c_n \neq 0$ при всех n. Будем, кроме того, считать, что $c_n \neq c_{n+1}$ при всех n.

Теорема 9 (Лейбниц). *Пусть абсолютная величина c_n общего члена знакочередующегося ряда (12), монотонно убывая, стремится к нулю. Тогда ряд (12) сходится.*

Доказательство. Пусть $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда (12). Тогда при $k = 2m$ будем иметь

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2m-3} - c_{2m-2}) + (c_{2m-1} - c_{2m}) =$$
$$= C_{2m-2} + (c_{2m-1} - c_{2m}) \quad (m = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots). \tag{13}$$

Так как по условию последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая, то все скобки в (13) содержат положительные разности. Отсюда вытекает, во-первых, что $C_{2m} > 0$, а, во-вторых, что $C_{2m} > C_{2m-2}$. Это последнее неравенство означает, что последовательность частичных сумм с четными номерами возрастает. Покажем, что эта последовательность ограничена сверху. Действительно, C_{2m} можно записать в виде

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}.$$

Так как каждое вычитаемое положительно, то, очевидно, $C_{2m} < c_1$. На основании теоремы о пределе возрастающей последовательности существует конечное

$$C = \lim_{m \to \infty} C_{2m}. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь последовательность частичных сумм с нечетными номерами. Очевидно,

$$C_{2m+1} = C_{2m} + c_{2m+1}. \tag{15}$$

Так как по условию $c_{2m+1} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$, то из равенства (15) вытекает существование предела $\lim\limits_{m \to \infty} C_{2m+1}$, и при этом

$$\lim_{m \to \infty} C_{2m+1} = C. \tag{16}$$

Из (14) и (16) вытекает существование конечного предела у последовательности $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда (12), т. е. сходимость ряда. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы мы получили неравенство $0 < C_{2m} < c_1$. Но так как $C > C_{2m}$ (последовательность $\{C_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ возрастает), то и $C > 0$. С другой стороны, предельный переход в неравенстве $C_{2m} < c_1$ дает $C \leqslant c_1$*. Таким образом, сумма рас-

---

* Впрочем, нетрудно показать, что в наших условиях имеет место строгое неравенство $C < c_1$

сматриваемого ряда положительная и не превосходит первого члена.

Остаток ряда (12) после k-го члена имеет вид

$$(-1)^k c_{k+1} + (-1)^{k+1} c_{k+2} + \cdots = (-1)^k (c_{k+1} - c_{k+2} + \cdots). \quad (17)$$

Но ряд в скобках обладает теми же свойствами, что и ряд (12), следовательно, его сумма тоже положительна и не превосходит c_{k+1}. Сумма же ряда в левой части (17) имеет знак $(-1)^k$. Тем самым мы установили следующий факт:

Пусть знакочередующийся ряд (*12*) *удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница. Тогда любой его остаток имеет знак своего первого члена, а абсолютная величина остатка не превосходит модуля этого члена.*

Рассмотрим примеры. В каждом из них требуется исследовать характер сходимости ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Здесь $c_n = \frac{1}{n}$, и выполнение всех условий теоремы Лейбница очевидно. Таким образом, ряд сходится. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то данный ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

представляет пример ряда, сходящегося не абсолютно.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4n+1000}{5n+7}\right)^n$.

Ряд сходится абсолютно, так как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1000}{5n+7} = \frac{4}{5} < 1.$$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{n^2+2}$.

Сначала проверим, что последовательность $\left\{\frac{n-2}{n^2+2}\right\}_{n=5}^{\infty}$ — убывающая. С этой целью рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2+2}, \quad 5 \leqslant x < +\infty.$$

Ее производная

$$f'(x) = \frac{x^2+2-2x(x-2)}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+4x+2}{(x^2+2)^2}.$$

Так как наибольший из корней квадратного трехчлена $-x^2 + 4x + 2$ равен $2 + \sqrt{6} < 5$, то в промежутке $[5, +\infty)$ производная f' сохраняет постоянный знак, именно $f'(x) < 0$. А тогда функция f — убывающая. Тем более убывающей будет и последовательность $\{f(n)\}_{n=5}^{\infty}$, т. е. $\left\{\frac{n-2}{n^2+2}\right\}_{n=5}^{\infty}$.

Теперь уже ясно, что остаток заданного ряда после 4-го члена, т. е. ряд $\sum\limits_{n=5}^{\infty}(-1)^n \frac{n-2}{n^2+2}$, удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница, и потому он сходится. Вместе с ним сходится и данный ряд.

Проверим, что его сходимость неабсолютная. Действительно, $|a_n| = \frac{n-2}{n^2+2} \sim \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$, и так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{30}{n}$.

Так как $\sin\frac{30}{n} \sim \frac{30}{n}$ при $n \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \sin\frac{30}{n}\right|$ расходится. С другой стороны, если $n > \frac{60}{\pi} \approx 19$, то $0 < \frac{30}{n} < \frac{\pi}{2}$. А тогда $\sin\frac{30}{n} > 0$ и убывает при возрастании n. Следовательно, остаток данного ряда после члена, имеющего номер $> \frac{60}{\pi}$, удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Из всего сказанного следует, что данный ряд сходится, но неабсолютно.

Рассмотрим еще один пример, в котором члены ряда зависят от параметра.

5. При каких значениях параметра p $(p > 0)$ ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^p}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}^p \frac{1}{n\sqrt{n}}$

сходятся абсолютно или неабсолютно.

Оба ряда при любом $p > 0$ удовлетворяют условиям теоремы Лейбница и потому сходятся.

В случае а) рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^p}$. Так как $\frac{1}{(2n-1)^p} \sim \frac{1}{2^p n^p}$ при $n \to \infty$, то ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$. Таким образом, ряд а) сходится абсолютно при $p > 1$ и неабсолютно при $0 < p \leqslant 1$.

В случае б) имеем

$$\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а

$$\operatorname{tg}^p \frac{1}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2 p}}.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}p}}$ сходится при $\frac{3}{2}p > 1$ и расходится при $\frac{3}{2}p \leqslant 1$. Таким образом, ряд б) сходится абсолютно при $p > \frac{2}{3}$ и неабсолютно при $p \leqslant \frac{2}{3}$.

Упражнения

Исследовать на абсолютную и неабсолютную сходимость следующие ряды:

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$; **18.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2n+301}{5n+1}\right)^n$; **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{5n+3}{2n+1}\right)^n$;

21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$; **22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$.

23. При каких значениях параметра p ($p > 0$) ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin^p \frac{5n+1}{n^2\sqrt{n+3}}$,

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \ln^p \frac{n+3}{n+1}$

сходятся абсолютно или неабсолютно?

24. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, то можно ли утверждать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится?

Рассмотреть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right]$.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. Сходится. **2.** Сходится. **3.** Сходится. **4.** Сходится. **5.** Сходится. **6.** Расходится. **7.** Сходится. **8.** Расходится. **9.** Сходится. **10.** Расходится. **11.** При $p > \frac{2}{3}$ сходится, при $p \leqslant \frac{2}{3}$ расходится. **12.** Сходится при $p > 0$. **13.** При $p > \frac{1}{2}$ сходится, при $p \leqslant \frac{1}{2}$ расходится. **14.** Сходится. **15.** Сходится. **16.** Сходится. **17.** Сходится абсолютно. **18.** Сходится неабсолютно. **19.** Сходится абсолютно. **20.** Расходится. **21.** Сходится неабсолютно. **22.** Сходится неабсолютно. **23.** а) При $p > \frac{2}{3}$ — сходится абсолютно, при $p \leqslant \frac{2}{3}$ схóдится неабсолютно; б) при $p > \frac{1}{2}$ сходится абсолютно, при $p \leqslant \frac{1}{2}$ сходится неабсолютно. **24.** Нет.

ГЛАВА II

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная и таблица простейших интегралов

Если первой основной задачей дифференциального исчисления можно было считать нахождение производной от заданной функции, то первой основной задачей интегрального исчисления является обращение основной задачи дифференциального исчисления: восстановление продифференцированной функции по ее производной. Как мы увидим дальше, эта задача оказывается значительно более трудной, чем задача дифференцирования.

Введем основное для всей главы определение.

Определение. Пусть функция f задана на промежутке $\langle a, b\rangle$.* Функция F, заданная на том же промежутке, называется *первообразной* для функции f (точнее — первообразной на промежутке $\langle a, b\rangle$), если $F'(x) = f(x)$ для всех x из $\langle a, b\rangle$.

Например, функция $\sin x$ на всей оси — первообразная для $\cos x$.

Таким образом, первая основная задача интегрального исчисления и будет заключаться в нахождении первообразной для заданной функции.

В связи с понятием первообразной сразу же возникают два вопроса: 1) для каких функций можно гарантировать существование первообразной? 2) сколько первообразных может иметь одна и та же функция? Ответ на первый вопрос дается теоремой, которую в этом разделе мы приведем без доказательства и которая будет доказана в нашем курсе позднее.

Теорема 1 (о существовании первообразной). *Если функция f непрерывна на промежутке $\langle a, b\rangle$, то на этом промежутке у нее существует первообразная.*

Ответ на второй вопрос содержится в следующей теореме.

---

* Через $\langle a, b\rangle$ мы обозначаем промежуток любого типа с концами a и b (замкнутый, открытый или полузамкнутый).

Теорема 2. *Если F — какая-нибудь первообразная для функции f на промежутке $\langle a,\ b\rangle$, то формула*

$$\Phi(x) = F(x) + C, \tag{1}$$

где C — любая постоянная, дает общий вид первообразных для f.

Иными словами, здесь утверждается, что всякая функция вида (1) — первообразная для f, и, обратно, всякая первообразная для f имеет вид (1) при надлежащем подборе постоянной C.

Доказательство. Если F — первообразная для f, то $F'(x) = f(x)$ при всех x из $\langle a,\ b\rangle$. Но тогда и $\Phi'(x) = F'(x) = f(x)$, т. е. и любая функция Φ, определяемая формулой (1), — первообразная для f.

Обратно, пусть Φ — произвольная первообразная для f. При всех $x \in \langle a,\ b\rangle$ имеем

$$\Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

т. е. $(\Phi - F)'(x) \equiv 0$ в промежутке $\langle a,\ b\rangle$. Но тогда, по известному из дифференциального исчисления признаку постоянства функции, разность $\Phi - F$ равна некоторой постоянной: $\Phi(x) - F(x) = C$. Отсюда и видно, что функция Φ выражается по формуле (1).

Теперь введем основное обозначение, которым пользуются в интегральном исчислении. Именно если f — некоторая функция, а F — ее первообразная (на каком-то промежутке), то пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{2}$$

и читают это соотношение так: *неопределенный интеграл от функции f равен $F(x) + C$*, где C — произвольная постоянная. Таким образом, обозначение интеграла $\int$ используется здесь для того, чтобы записать общий вид первообразных. Например,

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

Сама операция нахождения первообразной называется *интегрированием* функции.

В дальнейшем во всей этой главе, мы считаем, что все функции, стоящие под знаком интеграла (их называют *подынтегральными*), непрерывны, а тогда первообразные существуют и формула (2) имеет смысл.

Используя таблицу производных от простейших элементарных функций, мы можем составить таблицу некоторых простейших интегралов. Вот эта таблица:

I. $\int x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x > 0)$ *;

---

* $\int \frac{dx}{x}$ пишут вместо $\int \frac{1}{x}\,dx$ и, вообще, $\int \frac{dx}{\varphi(x)}$ означает $\int \frac{1}{\varphi(x)}\,dx$.

III. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

IV. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

V. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

VI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

VII. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

VIII. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;

IX. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ при $a > 0$ и $a \neq 1$

$\left(\text{в частности, } \int e^x\, dx = e^x + C\right)$.

Все эти формулы проверяются непосредственным дифференцированием, т. е. производная от правой части формулы всегда равна подынтегральной функции в левой части.

Отметим некоторые частные случаи формулы I:

$\int dx = x + C$ ($\mu = 0$; $\int dx$ означает интеграл с подынтегральной функцией, тождественно равной единице);

$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$ ($\mu = 1$);

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ $\left(\mu = \frac{1}{2}\right)$.

Упомянем еще и такую очевидную формулу:

$$\int 0\, dx = C,$$

т. е. первообразные от функции, тождественно равной 0, суть постоянные.

Наконец, заметим, что формуле VII можно придать и несколько другой вид, а именно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.$$

Это ни в какой степени не противоречит теореме 2, а объясняется тем, что функции $\arcsin x$ и $-\arccos x$ сами отличаются друг от друга на постоянное слагаемое

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогичное замечание можно сделать и по поводу формулы VIII, где вместо $\operatorname{arc\,tg} x$ можно поставить $-\operatorname{arc\,ctg} x$.

Теперь дадим одно существенное дополнение к формуле II. Функция $\frac{1}{x}$ непрерывна как в промежутке $(0, +\infty)$, так и в промежутке $(-\infty, 0)$. Однако формула II в том виде, как это записано выше, имеет смысл только при $x > 0$. Оказывается, что если ей придать вид

II'. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

то она будет справедливой в обоих промежутках: $x > 0$ и $x < 0$. Действительно; при $x > 0$ формула II' совпадает с табличной формулой II. Если же $x < 0$, то $|x| = -x$, и непосредственной проверкой, с помощью правила дифференцирования сложной функции, находим, что

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Приведем еще один пример интеграла, выражающегося с помощью логарифма

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+m}\right| + C \quad (m \neq 0).$$

Проверку этой формулы дифференцированием предоставляем читателю.

§ 2. Простейшие свойства интегралов

Установим две формулы:

$$\text{(А)} \quad \int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

(неопределенный интеграл от суммы или разности двух функций равен сумме или соответственно *разности их интегралов).*

Точный смысл этой формулы заключается в том, что если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \int g(x)\,dx = G(x) + C,$$

то

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = F(x) \pm G(x) + C^*.$$

Последнее же равенство очевидно, поскольку ясно, что если F — первообразная для f, G — первообразная для g, то $F \pm G$ — первообразная для $f \pm g$.

$$\text{(Б)} \quad \int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx,$$

* Сумма двух произвольных постоянных есть тоже произвольная постоянная, которую мы снова обозначаем буквой C.

если k — постоянная, не равная 0 *(постоянный множитель выносится за знак интеграла)*. Точный смысл этой формулы: если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$\int kf(x)\,dx = kF(x) + C\,*.$$

Последнее равенство тоже очевидно, поскольку

$$(kF)' = kF' = kf.$$

Используя формулы (А) и (Б) и табличную формулу I, легко проинтегрировать любой полином, например:

$$\int (x^3 - 3x^2 + 7x - 2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + C.$$

Приведем еще некоторые примеры.

1. Вычислить интеграл

$$J = \int \left(\frac{2-3x}{x}\right)^2 dx.$$

Имеем

$$J = \int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{12}{x} + 9\right) dx = \int \left(4x^{-2} - \frac{12}{x} + 9\right) dx.$$

Используя формулы (А) и (Б), находим

$$J = 4\int x^{-2}\,dx - 12\int \frac{dx}{x} + 9\int dx =$$

$$= 4\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 12\ln|x| + 9x + C =$$

$$= -\frac{4}{x} - 12\ln|x| + 9x + C.$$

При вычислении интегралов были использованы табличные формулы I и II′ (напомним, что II′ — уточнение формулы II).

Следующие примеры решаются аналогично.

2. $$\int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = \int \left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2\right) dx =$$

$$= \int a^2\,dx - 3a^{\frac{4}{3}}\int x^{\frac{2}{3}}\,dx + 3a^{\frac{2}{3}}\int x^{\frac{4}{3}}\,dx - \int x^2\,dx =$$

$$= a^2x - 3a^{\frac{4}{3}}\,\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + 3a^{\frac{2}{3}}\,\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1} + C =$$

$$= a^2x - \frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}x^3 + C.$$

---

* Формально добавочное слагаемое в правой части равенства (Б) имеет вид kC. Но, вместе с C, это произведение само является произвольной постоянной (когда $k \neq 0$), и мы снова обозначаем его буквой C.

3. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx =$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

Здесь при вычислении интеграла мы использовали, кроме формулы I, еще и формулу VI из таблицы основных интегралов.

4. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\,dx = \int \left(2\,\frac{2^x}{10^x} - \frac{5^x}{5\cdot 10^x}\right)dx =$

$$= \int \left[2\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx = 2\int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx =$$

$$= 2\,\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} - \frac{1}{5}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + C = -\frac{2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5\cdot 2^x \ln 2} + C.$$

При вычислении была использована формула IX основной таблицы.

Хотя теорема 1 гарантирует существование первообразной для любой непрерывной функции, однако первообразная для элементарной функции совсем не обязана сама быть элементарной функцией. Существование первообразной и ее выражение в виде элементарной функции — это совсем не одно и то же! Приведем несколько примеров интегралов, относительно которых в математике доказано, что они не могут быть выражены в виде элементарных функций: *

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int e^{-x^2}\,dx.$$

Тем не менее первообразные для написанных здесь функций не только существуют, но и довольно хорошо изучены, их значения вычислены приближенно, для них составлены таблицы. Чтобы убедить читателя в том, что все эти интегралы принципиально ничем «не хуже» тех, которые выражаются с помощью элементарных функций, представим на минуту, что мы не знакомы с логарифмами и что логарифмическая функция не включена в число элементарных. Тогда для интеграла $\int \frac{dx}{x}$ мы не сможем получить выражение в виде элементарной функции. Однако это не помешает нам изучить первообразную для $\frac{1}{x}$ как некоторую новую для нас функцию и тем самым установить и некоторые свойства логарифма.

* Такие интегралы часто для краткости называют «неберущимися».

§ 3. Замена переменной

В этом параграфе мы разберем один из способов, часто используемых при вычислении интегралов, — способ замены переменной. Этот способ основывается на следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть F — первообразная для f. Если φ — функция, имеющая непрерывную производную, то*

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Доказательство. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x),$$

т. е. производная правой части равна подынтегральной функции. Проиллюстрируем эту теорему на примере интеграла

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx.$$

Наличие множителя $\cos x$ подсказывает принять $\sin x$ за $\varphi(x)$. Тогда, чтобы представить функцию $\sin^3 x \cos x$ в виде $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$, следует понимать под f возведение в куб, т. е. считать, что $f(z) = z^3$. В этом случае $F(z) = \frac{1}{4} z^4$ и по доказанной теореме

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

Обычно необходимые выкладки записываются по следующей схеме. Положим $z = \sin x$; тогда $dz = \cos x\,dx$. Формальная подстановка приводит к равенству

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int z^3\,dz = \frac{1}{4} z^4 + C.$$

Подставляя сюда вместо z его выражение $\sin x$, мы и получим окончательный результат $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$.

Иногда правило замены переменной удобно использовать в другой форме.

Теорема 4. *Пусть функция φ имеет непрерывную производную и у φ существует обратная функция ψ. Если $G(t)$ — первообразная для функции*

$$g(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

(которая, очевидно, непрерывна), *то $G(\psi(x))$ — первообразная для $f(x)$, т. е.*

$$\int f(x)\,dx = G(\psi(x)) + C.$$

Доказательство. Обозначим через F первообразную для f. Тогда по теореме 3

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Таким образом, можно приравнять

$$F(\varphi(t)) = G(t).$$

Чтобы найти отсюда вид функции F, положим $x = \varphi(t)$ и подставим вместо t его выражение через x, т. е. $t = \psi(x)$. Так как $\varphi(\psi(x)) = x$, поскольку φ и ψ взаимно обратные функции, мы получим

$$F(x) = G(\psi(x)),$$

что и доказывает теорему.

При применении этой теоремы выкладки записываются по следующей схеме. Требуется вычислить $\int f(x)\,dx$. Положим $x = \varphi(t)$. Тогда $dx = \varphi'(t)\,dt$. В результате формальной подстановки находим

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int g(t)\,dt = G(t) + C.$$

«Возвращаясь к старой переменной», т. е. подставляя $t = \psi(x)$, получаем окончательный результат.

Пример. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

Используем подстановку $x = t^2$ (считая $t \geqslant 0$), которая позволяет избавиться под знаком интеграла от корня. Тогда $dx = 2t\,dt$ и

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx = 2\int \frac{t^2}{t+1}\,dt = 2\int \frac{(t^2-1)+1}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\left(\frac{1}{2}t^2 - t + \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= t^2 - 2t + \ln(t+1)^2 + C.$$

(По поводу вычисления $\int \frac{dt}{t+1}$ см. замечание на стр. 39.)

Чтобы получить выражение найденного интеграла через x, следует подставить $t = \sqrt{x}$. Таким образом,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx = x - 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}+1)^2 + C.$$

Приведем еще примеры на применение способа замены переменной в обеих формах.

Сначала дадим некоторые обобщения формул VII и VIII основной таблицы.

Рассмотрим интеграл

$$J=\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{dx}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \quad (a>0).$$

Положим $\frac{x}{a}=t$, тогда $x=at$, $dx=a\,dt$,

$$J=\int \frac{a\,dt}{a\sqrt{1-t^2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C$$

(по табличной формуле VII).

Возвращаясь к старой переменной x, получим

$$J=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Итак,

VII′. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0).$

Впредь этот интеграл тоже считаем табличным.

Рассмотрим далее интеграл

$$J=\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} \quad (a\neq 0).$$

Полагаем $\frac{x}{a}=t$, тогда $x=at$, $dx=a\,dt$,

$$J=\int \frac{a\,dt}{a^2(1+t^2)}=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg} t+C$$

(по табличной формуле VIII). Возвращаясь к старой переменной x, получим

$$J=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Итак,

VIII′. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a\neq 0).$

Впредь этот интеграл также считаем табличным.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим интеграл

$$J=\int f(x+a)\,dx.$$

Полагая $x+a=t$, получим

$$J=\int f(t)\,dt=F(t)+C=F(x+a)+C,$$

т. е., зная первообразную $F(t)$ для функции $f(t)$, можно получить первообразную для функции $f(x+a)$ подстановкой $t = x + a$ в $F(t)$. Впрочем к этому выводу можно прийти и в результате непосредственной проверки: $F'(x+a) = f(x+a)$. Отсюда получаем некоторые обобщения формул основной таблицы.

Например,

$$\text{I}'. \quad \int (x+a)^{\mu}\, dx = \frac{(x+a)^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1),$$

$$\text{II}''. \quad \int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C.$$

Легко получить и более общую формулу: если F — первообразная для f, то

$$\int f(\lambda x + a)\, dx = \frac{1}{\lambda} F(\lambda x + a) + C \quad (\lambda \neq 0).$$

Выведем еще одну формулу, которую мы также присоединим к табличным.

Рассмотрим интеграл

$$J = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad (a \neq 0).$$

Дробь $\frac{1}{x^2 - a^2}$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right].$$

Тогда

$$J = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a}.$$

По предыдущему замечанию интеграл равен

$$J = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Итак,

$$\text{X}. \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0).$$

Теперь наша таблица основных интегралов состоит из 10 формул с некоторыми обобщениями.

Рассмотрим несколько примеров на применение формул VII′, VIII′ и X.

1. Вычислить $J=\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$.

Приведем данный интеграл к интегралу вида $k\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, где k — постоянный множитель, а затем воспользуемся формулой VII′. Для этой цели из данного подкоренного выражения выносим коэффициент 5, стоящий при $-x^2$, тогда

$$J=\int \frac{dx}{\sqrt{5\left(\frac{7}{5}-x^2\right)}}=\int \frac{dx}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{7}{5}-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{5}-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{7}{5}}}+C.$$

Здесь мы применили формулу VII′, считая $a^2=\frac{7}{5}$, т. е. $a=\sqrt{\frac{7}{5}}$. Окончательно

$$J=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}+C.$$

Тот же интеграл легко вычисляется и с помощью сделанного выше замечания, точнее с помощью формулы

$$\int f(\lambda x)\,dx=\frac{1}{\lambda}F(\lambda x)+C$$

(F — первообразная для f).

Именно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{7-(x\sqrt{5})^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{7}}+C$$

(здесь $\lambda=\sqrt{5}$).

2. $J=\int \frac{dx}{2x^2+5}$.

Приведем данный интеграл к интегралу вида $k\int \frac{dx}{a^2+x^2}$, где k — постоянный множитель, и воспользуемся формулой VIII′

$$J=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{5}{2}}}+C=\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}x\sqrt{\frac{2}{5}}+C.$$

3. $J=\int \frac{dx}{7x^2-8}$.

Приведем данный интеграл к интегралу вида $k\int \frac{dx}{x^2-a^2}$, где k — постоянный множитель, и воспользуемся формулой X

$$J=\int \frac{dx}{7\left(x^2-\frac{8}{7}\right)}=\frac{1}{7}\int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{\frac{8}{7}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{8}{7}}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{8}{7}}}{x+\sqrt{\frac{8}{7}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{14}}\ln\left|\frac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}}\right|+C.$$

Приведем еще несколько примеров на использование теоремы о замене переменной под знаком интеграла.

4. $J=\int \sin(3x+5)\,dx$.

Положим $3x+5=t$, тогда $3\,dx=dt$, $dx=\frac{1}{3}\,dt$ и $J=\int \sin t\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}(-\cos t)+C$ (по формуле IV основной таблицы). Окончательно, возвращаясь к старой переменной, имеем

$$J=-\frac{1}{3}\cos(3x+5)+C.$$

5. $J=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3-2x}}$.

Подстановка $3-2x=t$ приводит к следующему:

$$-2dx=dt,\quad dx=-\frac{1}{2}dt,$$

$$J=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=-\frac{3}{4}t^{\frac{2}{3}}+C.$$

Окончательно получим

$$J=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(3-2x)^2}+C.$$

6. $J=\int x(5x-7)^{50}\,dx$.

Подынтегральная функция представляет собой произведение двух сомножителей, один из которых стоит в первой степени, другой — в пятидесятой. Здесь нерационально возводить второй множитель в пятидесятую степень. Нужно сделать такую замену переменной, чтобы двучлен, стоящий в высокой степени, превратился в одночлен, например, положим $5x - 7 = t$; тогда $x = \frac{t+7}{5}$, $dx = \frac{1}{5} dt$ и

$$J = \int \frac{t+7}{5} t^{50} \frac{1}{5} dt = \frac{1}{25} \int (t^{51} + 7t^{50})\, dt =$$

$$= \frac{1}{25} \left(\int t^{51}\, dt + 7 \int t^{50}\, dt \right) = \frac{1}{25} \left(\frac{t^{52}}{52} + 7 \frac{t^{51}}{51} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{25} \left[\frac{1}{52} (5x - 7)^{52} + \frac{7}{51} (5x - 7)^{51} \right] + C.$$

7. $J = \int \frac{3x}{(2 + x^2)^2} dx.$

Если из подынтегральной функции выделить множитель x, то оставшаяся ее часть будет зависеть лишь от x^2, т. е. подынтегральное выражение имеет вид $f(x^2)\, x dx$. Поэтому можно сделать подстановку $x^2 = z$; тогда $2x\, dx = dz$ и подынтегральное выражение упрощается. Однако еще удобнее положить $2 + x^2 = t$, тогда $2x\, dx = dt$, $x\, dx = \frac{1}{2} dt$ и

$$J = \int \frac{\frac{3}{2} dt}{t^2} = \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{t} \right) + C = -\frac{3}{2(2 + x^2)} + C.$$

Впрочем, если учесть сделанное выше замечание об интегралах вида $\int f(x + a)\, dx$, то и подстановка $x^2 = z$ будет нисколько не сложнее.

8. $J = \int 3x \cos(x^2 + 5)\, dx.$

Аналогично примеру 7 произведем здесь следующую подстановку: $x^2 + 5 = t$, тогда $2x\, dx = dt$, $x\, dx = \frac{1}{2} dt$. Следовательно,

$$J = \int 3 \cos t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{3}{2} \sin t + C = \frac{3}{2} \sin(x^2 + 5) + C.$$

9. $J = \int \frac{2x^3}{9x^8 - 4} dx.$

Заметим, что подынтегральную функцию можно представить в виде произведения функции от x^4 и множителя x^3. Поэтому удобно сделать подстановку $x^4 = t$, тогда $4x^3\,dx = dt$ и $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,dt$.

Следовательно,

$$J = \int \frac{2x^3}{9\,(x^4)^2 - 4}\,dx = \int \frac{2\cdot\frac{1}{4}\,dt}{9t^2 - 4} =$$

$$= \frac{1}{18}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{2}{3}}\ln\left|\frac{t - \frac{2}{3}}{t + \frac{2}{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x^4 - 2}{3x^4 + 2}\right| + C$$

(здесь мы использовали формулу X, добавленную нами к основной таблице).

10. $J = \int \sin 3x \cos 5x\,dx$.

При вычислении интегралов вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x\,dx$ удобно пользоваться следующей формулой:

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x\right].$$

Тогда исходный интеграл перепишется в виде:

$$J = \frac{1}{2}\int [\sin(3 + 5)x + \sin(3 - 5)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 8x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin(-2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 8x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx.$$

Полагая в первом интеграле $8x = t$, во втором $2x = y$, получим

$$J = \frac{1}{2}\int \sin t\cdot\frac{1}{8}\,dt - \frac{1}{2}\int \sin y\cdot\frac{1}{2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{16}(-\cos t) - \frac{1}{4}(-\cos y) + C =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

11. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$.

Положим $2x = t$. Тогда $dx = \frac{1}{2} dt$
и

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}}.$$

Далее, для того чтобы избавиться от иррациональности в подынтегральном выражении, положим $1 + e^t = z^2$, отсюда $e^t = z^2 - 1$, $e^t\,dt = 2z\,dz$, $dt = \frac{2z}{z^2-1}dz$ и

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{2z}{(z^2-1)z}dz = \int \frac{1}{z^2-1}dz = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right| + C.$$

В следующих двух примерах подынтегральные выражения содержат корни вида $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$. В таких случаях бывает удобно заменить x на тригонометрическую функцию новой переменной с таким расчетом, чтобы избавиться от корней. Например, в первом случае сделаем подстановку $x = a\sin t$, тогда

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2 t = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2\cos^2 t,$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$$

(не умаляя общности, можно считать, что $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right]$, а тогда $\cos t \geqslant 0$).

При наличии под знаком интеграла корня $\sqrt{a^2 + x^2}$ бывает удобна подстановка $x = a\,\mathrm{tg}\,t$; если же подынтегральная функция содержит $\sqrt{x^2 - a^2}$, то иногда удается использовать подстановку $x = a\sec t$.

12. $J = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$.

Имеем $x = a\sin t$, тогда $dx = a\cos t\,dt$
и

$$J = a^2\int \cos^2 t\,dt.$$

Чтобы избавиться от квадрата $\cos t$, используем формулу $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$, тогда

$$J = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin 2t}{2} + C = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C.$$

Но $\sin t = \frac{x}{a}$, $\cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$, а потому

$$J = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

13. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}$ $(a > 0)$.

Положим $x = a \operatorname{tg} t$. Тогда $x^2 + a^2 = a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 t) = a^2 \sec^2 t = \frac{a^2}{\cos^2 t}$; при этом считаем, что $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Далее, $\sqrt{(x^2 + a^2)^3} = \frac{a^3}{\cos^3 t}$, $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$,

$$J = \int \frac{\frac{a}{\cos^2 t} dt}{\frac{a^3}{\cos^3 t}} = \frac{1}{a^2} \int \cos t \, dt = \frac{1}{a^2} \sin t + C.$$

Чтобы возвратиться к исходному аргументу x, заметим, что $\sin t = \operatorname{tg} t \cos t$, а так как $\operatorname{tg} t = \frac{x}{a}$, $\cos t = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, то $\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. Окончательно имеем

$$J = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C.$$

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int (\sqrt{x} + 2)(2x - \sqrt{x} + 3) \, dx$; 2. $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx$, $a > 0$;

3. $\int 3^x e^x dx$; 4. $\int \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$; 5. $\int \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{4 - x^4}} dx$;

6. $\int \frac{5x + 7}{5x + 3} dx$; 7. $\int \frac{(3x + 2) \, dx}{3x^2 + 4x + 3}$; 8. $\int \frac{x^2}{2x^2 + 5} dx$;

9. $\int x e^{-x^2 - 1} dx$; 10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 1}} dx$; 11. $\int \frac{ax + b}{a^2 x^2 + b^2} dx$, $a \neq 0$;

12. $\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$; 13. $\int \frac{3x + 1}{\sqrt{5x^2 + 1}} dx$; 14. $\int (2x + 3)^7 x^2 dx$;

15. $\int \sin 5x \sin 3x \, dx$; 16. $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$; 17. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx$;

18. $\int \frac{dx}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$; 19. $\int x \sqrt[5]{9 - x^2} \, dx$; 20. $\int x^2 \sqrt{2 - x^2} \, dx$;

21. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} dx$; 22. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2} dx$; 23. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{2 - 5x}}$;

24. $\int \frac{dx}{1 - 3 \sin^2 x}$; 25. $\int \frac{x^2}{3 - x^4} dx$.

§ 4. Интегрирование по частям

Другой часто применяемый способ вычисления интегралов — интегрирование по частям, — основан на использовании формулы для производной от произведения двух функций.

Пусть u и v — функции, имеющие непрерывные производные u' и v'. Из формулы

$$(uv)' = u'v + uv'$$

следует, что произведение uv — первообразная для $u'v + uv'$. Тем самым

$$\int u'v\,dx + \int uv'\,dx = uv + C,$$

откуда

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

(постоянную C в правой части мы не пишем, поскольку туда входит интеграл, а он уже содержит в себе произвольную постоянную). Это и есть формула интегрирования по частям. Обычно эту формулу пишут в более сжатом виде, заменяя $v'dx$ через dv, а $u'dx$ через du:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{3}$$

Эта формула позволяет свести вычисление одного интеграла к вычислению другого, который может оказаться более простым.

Примеры. 1. Вычислить $\int xe^{2x}\,dx$.

Если положить $u = x$, $dv = e^{2x}\,dx$, то интеграл в правой части формулы (3) окажется проще, чем в левой. Действительно, тогда $du = dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$ (в качестве v мы берем наиболее простую функцию, для которой $dv = e^{2x}\,dx$, т. е. не включаем в состав v произвольную постоянную). Подставляя в (3), находим

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx.$$

Мы свели решение примера к вычислению такого интеграла, где первообразная очевидна:

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Следовательно,

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = e^{2x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) + C.$$

Заметим, что если мы бы положили $u = e^{2x}$, $dv = x\,dx$, то формула (3) не привела бы к упрощению данного интеграла, так как под знаком интеграла справа вместо x в первой степени появился бы множитель x^2.

2. Вычислить $\int x^2 \cos x\, dx$.

По тем же соображениям, что и в предыдущем примере, положим $u = x^2$ (при дифференцировании этот множитель будет упрощаться!), $dv = \cos x\, dx$. Тогда $du = 2x\, dx$, $v = \sin x$, и по формуле (3) находим

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx.$$

Интеграл в правой части проще тем, что он содержит более низкую степень x. Чтобы вычислить последний интеграл, применим еще раз способ интегрирования по частям. С этой целью положим $u = x$, $dv = \sin x\, dx$. Тогда $du = dx$, $v = -\cos x$, и по формуле (3)

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Подставляя этот результат в предыдущее равенство, получаем

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C.$$

Заметим, что если для вычисления некоторого интеграла формула интегрирования по частям применяется дважды, то нужно следить, чтобы при втором применении этой формулы мы бы не проделали в обратном порядке те выкладки, которые уже встретились на первом шаге. В противном случае мы придем к ничего не дающему тождеству.

Поясним это замечание на следующем примере.

3. Вычислить $\int e^{ax} \cos bx\, dx \quad (a,\ b \neq 0)$.

Положим $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\, dx$. Тогда $du = ae^{ax}\, dx$, $v = \frac{1}{b} \sin bx$. По формуле (3)

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\, dx. \tag{4}$$

Если для вычисления последнего интеграла положить $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}\, dx$, то произойдет то, против чего мы предостерегали. Рекомендуем читателю проделать все выкладки и убедиться, что получится тождество

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Если же снова принять $u = e^{ax}$, а $dv = \sin bx\, dx$, то $du = ae^{ax}\, dx$, $v = -\frac{1}{b} \cos bx$, и формула (3) даст

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Подставляя в (4), получим

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

В правой части оказался такой же интеграл, что и в левой. Однако последнее равенство следует рассматривать как уравнение, где роль неизвестного играет искомый интеграл. Решая это уравнение, мы найдем одну из первообразных (выкладки мы пропускаем), а окончательный ответ запишется так:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + C.$$

Иногда к уравнению можно прийти и в результате однократного применения формулы интегрирования по частям.

4. Вычислить $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

Положим $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x}$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \ln x$ и по формуле (3)

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\,dx,$$

откуда

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

Впрочем, данный интеграл легко вычисляется с помощью замены переменной, если положить $z = \ln x$.

5. Вычислить $J = \int \sqrt{x^2+a}\,dx \quad (a \neq 0)$.

Применим формулу (3), полагая $u = \sqrt{x^2+a}$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$, $v = x$, следовательно,

$$J = x\sqrt{x^2-a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx. \tag{5}$$

Займемся интегралом $J_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$. Числитель в интеграле J_1 представим в следующей форме: $x^2 = (x^2+a) - a$, тогда

$$J_1 = \int \frac{(x^2+a)}{\sqrt{x^2+a}}\,dx + \int \frac{-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx =$$

$$= \int \sqrt{x^2+a}\,dx - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = J - a\ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$$

(см. пример, приведенный в конце § 1).

Подставляя выражение для J_1 в (5), получим уравнение относительно J

$$J = x\sqrt{x^2+a} - \left[J - a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C\right].$$

Отсюда

$$J = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C.$$

6. $J = \int xe^{ax} \cos bx\, dx.$

Применим формулу (3), полагая $u = x$, $dv = e^{ax} \cos bx\, dx$. Тогда $du = dx$, а v можно найти из примера 3, а именно

$$v = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2}.$$

Тем самым,

$$J = xe^{ax} \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} - \frac{1}{a^2+b^2} \int e^{ax} (a\cos bx + b\sin bx)\, dx =$$

$$= xe^{ax} \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} - \frac{a}{a^2+b^2} \int e^{ax} \cos bx\, dx -$$

$$- \frac{b}{a^2+b^2} \int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

Первый из интегралов справа вычислен в примере 3. Второй может быть вычислен совершенно аналогично

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = e^{ax} \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}.$$

Подставляя в выражение для J, получаем

$$J = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \left[\left(x - \frac{a}{a^2+b^2}\right)(a\cos bx + b\sin bx) -\right.$$

$$\left. - \frac{b}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)\right] + C.$$

Дадим теперь некоторые общие указания по поводу применения метода интегрирования по частям.

I. Интегралы вида

$$J_1 = \int P(x) e^{ax}\, dx, \quad J_2 = \int P(x) \sin bx\, dx, \quad J_3 = \int P(x) \cos bx\, dx,$$

где $P(x)$ — полином, a, b — постоянные.

Для вычисления этих интегралов применяем формулу (3), полагая $u = P(x)$ (за dv принимается вся остальная часть подынтегрального выражения). Этот прием дает возможность постепенно понижать степень полинома, стоящего под знаком интеграла. Так, например, для J_1 имеем: $u = P(x)$, $dv = e^{ax}\, dx$. Тогда

$$du = P'(x)\, dx, \quad v = \frac{1}{a} e^{ax}$$

и

$$J_1 = \frac{1}{a} e^{ax} P(x) - \frac{1}{a} \int e^{ax} P'(x)\, dx.$$

Последовательно применяя формулу интегрирования по частям столько раз, какова степень полинома P, мы сведем вычисление данного интеграла J_1 к вычислению интеграла $\int e^{ax}\, dx$, а этот последний находится моментально.

Приведем несколько примеров.

7. $J = \int x^2 \sin 3x\, dx$.

Применим формулу (3), полагая $u = x^2$, $dv = \sin 3x\, dx$. При этом $du = 2x\, dx$, $v = -\frac{1}{3} \cos 3x$, тогда

$$J = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \int x \cos 3x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} J_1.$$

К интегралу J_1 применим формулу (3), полагая $u = x$, $dv = \cos 3x\, dx$. При этом $du = dx$, $v = \frac{1}{3} \sin 3x$; тогда

$$J = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x\, dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{9} x \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + C.$$

8. $J = \int 3x^3 e^{-x^2}\, dx$.

Сначала сделаем замену переменной, полагая $-x^2 = t$; тогда $-2x\, dx = dt$ и $J = \frac{3}{2} \int te^t\, dt$. Далее применим формулу (3), полагая $u = t$, $dv = e^t\, dt$. При этом $du = dt$, $v = e^t$. Тогда

$$J = \frac{3}{2} \left[te^t - \int e^t\, dt \right] = \frac{3}{2} te^t - \frac{3}{2} e^t + C =$$

$$= -\frac{3}{2} e^t (1 - t) + C,$$

где $t = -x^2$, и окончательно

$$J = -\frac{3}{2} e^{-x^2} (1 + x^2) + C.$$

II. Интегрирование выражений, содержащих одну из функций вида $\ln f(x)$, $\operatorname{arctg} f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, где $f(x)$ — какая-нибудь рациональная или иррациональная функция.

Для вычисления рекомендуется применить формулу интегрирования по частям (3). При этом за u следует принимать упомянутую выше функцию. Удастся ли, однако, довести вычисление до конца, зависит от степени сложности всего подынтегрального выражения в целом.

Для вычисления, например, $J = \int \ln f(x)\,dx$ полагаем $u = \ln f(x)$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$, $v = x$ и $J = x \ln f(x) - \int \frac{xf'(x)}{f(x)}\,dx = x \ln f(x) - J_1$, и мы свели задачу к вычислению интеграла J_1, который может оказаться проще, чем J.

9. $J = \int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,dx$.

Полагаем $u = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $dv = \sqrt{x}\,dx$. При этом $du = \frac{1}{1+x} \times \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $v = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$. Тогда

$$J = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3} \int \frac{x}{1+x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3} (x - \ln|1+x|) + C.$$

10. $J = \int x \arccos x\,dx$.

Положим $u = \arccos x$, $dv = x\,dx$. Отсюда $du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \frac{1}{2} x^2$, тогда

$$J = \frac{1}{2} x^2 \arccos x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} x^2 \arccos x + \frac{1}{2} J_1.$$

Для вычисления J_1 удобно воспользоваться тригонометрической подстановкой $x = \sin t$, считая, что $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; тогда $dx = \cos t\,dt$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ и

$$J_1 = \int \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos t} dt = \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t + C_1,$$

где $t = \arcsin x$. Окончательно

$$J = \frac{1}{2} x^2 \arccos x + \frac{1}{4} \arcsin x - \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

11. $J = \int (\ln^2 x - 2 \ln x)\,dx = \int \ln^2 x\,dx - 2 \int \ln x\,dx = J_1 - 2J_2.$

Вычислим сначала J_1, для чего полагаем $u = \ln^2 x$, $dv = dx$. Отсюда $du = \frac{2 \ln x}{x} dx$, $v = x$, тогда $J_1 = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx = x \ln^2 x - 2J_2$. Следовательно, $J = x \ln^2 x - 4J_2$.

Теперь для вычисления J_2 полагаем $u = \ln x$, $dv = dx$. В этом случае $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$, тогда

$$J_2 = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Окончательно

$$J = x (\ln^2 x - 4 \ln x + 4) + C.$$

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

26. $\int (x^3 + x) e^{5x} dx$; **27.** $\int x^3 \cos (2x^2) dx$; **28.** $\int x^2 \ln (1 + x) dx$; **29.** $\int x^2 \sin x \cos x \, dx$; **30.** $\int x \arcsin x \, dx$; **31.** $\int 2x \sin [3 \ln 2x] dx$; **32.** $\int x e^{2x} \sin 5x \, dx$; **33.** $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$; **34.** $\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx$; **35.** $\int \ln (x + \sqrt{16 + x^2}) dx$.

§ 5. Интегрирование дробно-рациональных функций

Напомним, что *дробно-рациональной* функцией называется функция вида

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m, $Q_n(x)$ — многочлен степени n. Если $m \geqslant n$, то дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется *неправильной*, если $m < n$, то дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется *правильной*.

Если $R(x)$ оказывается неправильной рациональной дробью, то мы всегда с помощью деления можем выделить из нее целую часть, т. е. представить в виде

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = r(x) + \frac{P_k(x)}{Q_n(x)},$$

где $k < n$, $r(x)$ — многочлен (это и есть целая часть от $R(x)$).

Например,

$$\frac{x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x}{(x-1)^2 (x^2+1)^2} = x + \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2 (x^2+1)^2}.$$

Здесь

$$r(x) = x,\ P_2(x) = -x^2 + 2x,\ Q_6(x) = (x-1)^2 (x^2+1)^2.$$

Поскольку интеграл от целой части, т. е. от многочлена, мы уже умеем вычислять, будем далее рассматривать правильную рациональную дробь.

Итак, пусть требуется вычислить интеграл $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, где дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ правильная.

Из курса алгебры известна следующая теорема: *всякий многочлен с вещественными коэффициентами разлагается на линейные двучлены и квадратные трехчлены с вещественными коэффициентами:*

$$Q(x) = c(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots \times$$
$$\times (x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\cdots \times$$
$$\times (x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

где k_i, l_j $(i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s)$ — *натуральные числа,* c, $a_1, \ldots, a_r$, p_1, $q_1, \ldots, p_s$, q_s — *вещественные числа,* $a_1, \ldots, a_r$ — *вещественные корни* $Q(x)$ *кратности соответственно* $k_1, k_2, \ldots, k_r$, *трехчлены* $x^2 + p_jx + q_j$, $j = 1, \ldots, s$, *не имеют вещественных корней, т. е.* $\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0$, $j = 1, 2, \ldots, s$. *Комплексные корни трехчлена* $x^2 + p_jx + q_j$, $j = 1, \ldots, s$, *являются комплексными корнями* $Q(x)$ *кратности соответственно* $l_1, l_2, \ldots, l_s$.

Не умаляя общности, можно считать коэффициент c при старшей степени x в $Q(x)$ равным 1.

С помощью этой теоремы устанавливается теорема о разложении правильной рациональной дроби, которая также доказывается в курсе алгебры. Приведем ее формулировку.

Теорема. *Если*

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots \times$$
$$\times (x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\cdots \times$$
$$\times (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}, \tag{6}$$

$\sum_{i=1}^{r} k_i + 2\sum_{i=1}^{s} l_i = n$, *где* n — *степень многочлена* $Q(x)$,

$$\frac{p_i^2}{4} - q_i < 0,\ i = 1, 2, \ldots, s,$$

то каждая правильная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *может быть представлена в виде суммы конечного числа дробей следующих двух видов:*

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \frac{A}{(x-a)^k}, \\ &2)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l},\ \text{где}\ \frac{p^2}{4}-q<0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

а именно

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\dots+\frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+ \\ & +\frac{B_1}{x-a_2}+\frac{B_2}{(x-a_2)^2}+\dots+\frac{B_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}}+\dots+ \\ & +\frac{H_1}{x-a_r}+\frac{H_2}{(x-a_r)^2}+\dots+\frac{H_{k_r}}{(x-a_r)^{k_r}}+ \\ & +\frac{K_1x+L_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{K_2x+L_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\dots+\frac{K_{l_1}x+L_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+ \\ & +\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\dots+\frac{M_{l_2}x+N_{l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}}+\dots+ \\ & +\frac{R_1x+T_1}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{R_2x+T_2}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+\dots+\frac{R_{l_s}x+T_{l_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_{k_1},\ B_1,\ \dots,\ H_{k_r},\ K_1,\ L_1,\ \dots,\ R_{l_s},\ T_{l_s}$ — *некоторые вещественные числа.*

Как видно из представления (8), простейшие дроби, на которые распадается данная рациональная дробь, образуют группы, соответствующие множителям в правой части равенства (6), причем каждая такая группа содержит столько членов, какова степень рассматриваемого множителя. Например, множителю $(x-a_1)^{k_1}$ соответствует группа дробей вида 1), стоящая в первой строке формулы (8), а количество дробей в этой строке равно k_1. Множителю $(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}$ соответствует группа дробей вида (2), стоящая в четвертой строчке формулы (8), количество дробей в этой строке равно l_1.

Следует заметить, что в разложении конкретной дроби по формуле (8) некоторые из коэффициентов могут оказаться равными 0, и потому число слагаемых в каждой группе может оказаться и меньше, чем соответствующий показатель кратности.

Пусть дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ представлена в виде (8), где $A_1,\ A_2,\ \dots$ $\dots,\ R_{l_s},\ T_{l_s}$ — некоторые неизвестные коэффициенты. Правую часть равенства (8) приведем к общему знаменателю $Q(x)$. Тогда мы придем к равенству двух дробей с одинаковыми знаменателями. Отбросив справа и слева знаменатели, приравниваем числители левой и правой частей. Это приводит к тождественному равенству двух многочленов, причем в левой части стоит известный нам многочлен $P(x)$, а в правой — многочлен с коэффициентами, выражающимися через неизвестные $A_1, A_2, \ldots, R_{l_s}, T_{l_s}$ *. Как известно из курса высшей алгебры, два многочлена равны тождественно тогда и только тогда, когда у них равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе уравнений, из которой единственным образом определяются $A_1, A_2, \ldots, R_{l_s}, T_{l_s}$.

Рассмотрим правильную дробь из приведенного выше примера: $\frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$. Эта дробь, согласно (8) может быть представлена так:

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим

$$x^2-2x=A_1(x-1)(x^2+1)^2+A_2(x^2+1)^2+$$
$$+(M_1x+N_1)(x-1)^2(x^2+1)+(M_2x+N_2)(x-1)^2.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим следующую систему для отыскания неизвестных коэффициентов:

$$\left.\begin{array}{ll} x^5: & 0=A_1+M_1, \\ x^4: & 0=-A_1+A_2-2M_1+N_1, \\ x^3: & 0=2A_1+2M_1-2N_1+M_2, \\ x^2: & 1=-2A_1+2A_2-2M_1+2N_1-2M_2+N_2, \\ x: & -2=A_1+M_1-2N_1+M_2-2N_2, \\ x^0: & 0=-A_1+A_2+N_1+N_2. \end{array}\right\}$$

В этой таблице слева указано, за счет какой степени x получено соответствующее уравнение. Последняя строка, отмеченная x^0, получена за счет приравнивания свободных членов.

Решение системы дает

$$A_1=\frac{1}{2},\quad A_2=-\frac{1}{4},\quad M_1=-\frac{1}{2},\quad N_1=-\frac{1}{4},$$

$$M_2=-\frac{1}{2},\quad N_2=1.$$

---

* Это равенство очевидно при $x \neq a_1, a_2, \ldots, a_r$, но тогда по непрерывности многочленов оно справедливо и в точках $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Итак,

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{(x-1)^2}+$$
$$+\frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}{x^2+1}+\frac{-\frac{1}{2}x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Рассмотрим вопрос об интегрировании дробей типов 1), 2) (см. формулы (7)).

1) а) При $k=1$ имеем

$$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\ln|x-a|+C,$$

б) при $k=2, 3, \ldots$ имеем

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

Эти результаты совершенно очевидны.

2) а) При $l=1$ имеем

$$J=\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx.$$

Представим числитель подынтегральной функции в следующем виде:

$$Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right).$$

Тогда

$$J=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

В первом интеграле в числителе стоит производная знаменателя, поэтому здесь удобно сделать подстановку $x^2+px+q=t$ и

$$\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln(x^2+px+q)+C.$$

Второй интеграл приводится к табличному интегралу вида VIII' (см. § 3)

$$\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

$\left(\text{Здесь } q-\frac{p^2}{4}>0\right).$

Итак,

$$J = \frac{M}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

б) Рассмотрим интеграл $J = \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^l}\,dx$ при $l = 2, 3, \ldots$

Преобразуем числитель подынтегрального выражения так же, как и в пункте а):

$$Mx + N = \frac{M}{2}(2x + p) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right),$$

тогда

$$J = \frac{M}{2}\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^l}\,dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^l} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^l} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^l} =$$

$$= \frac{M}{2}\,\frac{(x^2 + px + q)^{-l+1}}{-l + 1} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^l},$$

где $t = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$.

Чтобы довести это вычисление до конца, рассмотрим интеграл

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Применим к J_n формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = \frac{1}{(t^2 + a^2)^n},\ dv = dt.$$

Тогда

$$du = \frac{-2nt}{(t^2 + a^2)^{n+1}}\,dt,\ v = t,$$

следовательно,

$$J_n = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}}\,dt.$$

Представим числитель подынтегрального выражения t^2 в виде $t^2 = (t^2 + a^2) - a^2$ и разобьем последний интеграл на сумму двух интегралов; тогда получим

$$J_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2+a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt + 2n\int \frac{-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2J_{n+1},$$

т. е.

$$J_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2J_{n+1};$$

отсюда

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + (2n-1)\,J_n\right] \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{9}$$

Формула (9) позволяет свести вычисление J_{n+1} к вычислению J_n. В свою очередь вычисление J_n по этой же формуле (9) сводится к вычислению J_{n-1} и т. п. В конце концов мы дойдем до интеграла J_1, а этот интеграл нам хорошо известен

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

В результате будет вычислен и J_{n+1}.

Формулы такого типа, как (9), называются *рекуррентными*.

Итак, мы указали метод, с помощью которого интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции: рациональные, логарифмические и арктангенс.

В качестве примера вернемся к ранее рассмотренной неправильной дроби

$$J = \int \frac{x^7-2x^6+3x^5-4x^4+3x^3-3x^2+3x}{(x-1)^2\,(x^2+1)^2}\,dx.$$

Используя найденные выше разложения, получаем

$$\frac{x^7-2x^6+3x^5-4x^4+3x^3-3x^2+3x}{(x-1)^2\,(x^2+1)^2} = x - \frac{x^2-2x}{(x-1)^2\,(x^2+1)^2} =$$

$$= x - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}x-1}{(x^2+1)^2}.$$

Следовательно,

$$J = \int x\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2} +$$

$$+ \frac{1}{4}\int\frac{2x+1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{x-2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 -$$

$$- \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) +$$

$$+ \frac{1}{4}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{4(x^2+1)} - J_2,$$

где $J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$; J_2 найдем по формуле (9) при $n = 1$ и $a = 1$:

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + J_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}\right) =$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Итак,

$$J = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) -$$

$$- \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4(x^2+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$$

Замечание. Если $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — вещественные различные корни $Q(x)$, то коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_k$ разложения правильной дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_k}{x-a_k} \qquad (10)$$

находятся по формулам

$$A_i = \frac{P(a_i)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_k)} =$$

$$= \frac{P(a_i)}{Q'(a_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \qquad (11)$$

Действительно, приводя правую часть формулы (10) к общему знаменателю, получаем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} =$$

$$= \frac{1}{Q(x)}\{A_1(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_k) + \cdots +$$
$$+ A_i(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_k) +$$
$$+ \cdots + A_k(x-a_1)\cdots(x-a_{k-1})\}.$$

Отбрасывая знаменатели и полагая $x = a_i$, получим

$$P(a_i) = A_i(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_k),$$
$$(i = 1, 2, \cdots, k).$$

С другой стороны,

$$Q'(x) = (x-a_2)\cdots(x-a_k) + \cdots + (x-a_1)\cdots(x-a_{i-1}) \times$$
$$\times (x-a_{i+1})\cdots(x-a_k) + \cdots + (x-a_1)\cdots(x-a_{k-1}),$$

отсюда

$$Q'(a_i) = (a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_k),$$
$$(i = 1, 2, \cdots, k).$$

Тем самым формула (11) доказана.

Вообще, если $Q(x)$ имеет вещественные корни a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ хотя бы и кратные, то при нахождении коэффициентов разложения полезно подставить $x = a_i$ в то равенство многочленов, которое получается из (8) после приведения к общему знаменателю. При этом удается определить некоторые из коэффициентов разложения, а система уравнений для нахождения остальных коэффициентов будет проще, чем в общем случае (см. ниже, пример 2).

Примеры

1. Вычислить $J = \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x(x-2)(x+2)}\,dx$.

Сначала выделим целую часть дроби

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x(x-2)(x+2)} = x + \frac{5x^2 + 1}{x(x-2)(x+2)}.$$

Затем правильную дробь разложим на простейшие дроби:

$$\frac{5x^2 + 1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+2}.$$

Используем формулу (11) и сразу получаем

$$A_1 = \frac{5 \cdot 0 + 1}{(0-2)(0+2)} = -\frac{1}{4}, \quad A_2 = \frac{21}{8}, \quad A_3 = \frac{21}{8}.$$

Итак,

$$J = \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{-\frac{1}{4}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{21}{8}}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{21}{8}}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{21}{8}\ln|x-2| + \frac{21}{8}\ln|x+2| + C.$$

2. $J = \int \frac{dx}{x(x-1)(x^2-x+1)^2}$.

Подынтегральное выражение представляет собой правильную дробь, поэтому можно сразу написать ее разложение на простейшие дроби

$$\frac{1}{x(x-1)(x^2-x+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{M_1x + N_1}{x^2-x+1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2-x+1)^2}.$$

Отсюда

$$1 = A_1(x-1)(x^2-x+1)^2 + A_2x(x^2-x+1)^2 +$$
$$+ (M_1x + N_1)\,x(x-1)(x^2-x+1) + (M_2x + N_2)\,x(x-1).$$

Полагая $x = 0$, находим A_1

$$1 = A_1(-1) + 0, \quad A_1 = -1.$$

Полагая $x = 1$, находим A_2

$$1 = 0 + A_2 \cdot 1 + 0, \quad A_2 = 1.$$

Для определения оставшихся четырех коэффициентов составим систему из четырех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &x^5\colon\ 0 = A_1 + A_2 + M_1, \\ &x^4\colon\ 0 = -3A_1 - 2A_2 + N_1 - 2M_1, \\ &x^3\colon\ 0 = 5A_1 + 3A_2 + 2M_1 - 2N_1 + M_2, \\ &x^2\colon\ 0 = -5A_1 - 2A_2 - M_1 + 2N_1 + N_2 - M_2. \end{aligned}\right\}$$

Из этих уравнений последовательно находим $M_1 = 0$, $N_1 = -1$, $M_2 = 0$, $N_2 = -1$.
Итак,

$$J = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-1}{x^2 - x + 1}\,dx + \int \frac{-1}{(x^2 - x + 1)^2}\,dx =$$

$$= -\ln|x| + \ln|x-1| - \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} -$$

$$- \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - J_2,$$

где через J_2 обозначен последний интеграл.

Для вычисления J_2 сделаем замену переменной $x - \frac{1}{2} = t$ и воспользуемся рекуррентным соотношением (9)

$$J_2 = \int \frac{dt}{\left[t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2} = \frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}}\left[\frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}t\right] + C =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{2x-1}{x^2 - x + 1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Подставляя выражение для J_2 в J, получим

$$J = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\,\frac{2x-1}{x^2 - x + 1} + C.$$

Заметим, что в написанной выше системе уравнений последнее уравнение было бы немного проще, если бы мы приравняли коэффициенты при x в 1-й степени

3. $J = \int \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 4)(x^2 - 2)}\,dx,$

Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ представляет собой четную функцию от x, то удобно при ее разложении на простейшие дроби (только при разложении!) положить $x^2 = t$. Тогда

$$\frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2-1)(x^2+4)(x^2-2)} = \frac{t^2 - t + 1}{(t-1)(t+4)(t-2)} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{t+4} + \frac{A_3}{t-2}.$$

Коэффициенты A_1, A_2 и A_3 вычисляем с помощью формулы (11)

$$A_1 = -\frac{1}{5}, \quad A_2 = \frac{7}{10}, \quad A_3 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2-1)(x^2+4)(x^2-2)} = \frac{-\frac{1}{5}}{x^2-1} + \frac{\frac{7}{10}}{x^2+4} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2-2}$$

и

$$J = -\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2-1} + \frac{7}{10}\int\frac{dx}{x^2+4} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-2} =$$

$$= -\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{7}{20}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C.$$

4. $J = \int \frac{\ln(x^2+1)}{(1-2x)^3}\,dx.$

Сначала применим формулу интегрирования по частям, полагая $u = \ln(x^2+1)$, $dv = \frac{dx}{(1-2x)^3}$. Тогда $du = \frac{2x}{x^2+1}dx$, $v = \frac{1}{4(1-2x)^2}$ и

$$J = \frac{\ln(x^2+1)}{4(1-2x)^2} - \frac{1}{2}\int\frac{x}{(1-2x)^2(x^2+1)}dx =$$

$$= \frac{\ln(x^2+1)}{4(1-2x)^2} - \frac{1}{8}J_1.$$

Интеграл $J_1 = \int \frac{x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x^2+1)}dx$ находим, предварительно разложив подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{A_2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Отсюда

$$x = A_1\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Mx+N)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2. \quad (12)$$

Положим $x = \frac{1}{2}$, тогда $\frac{1}{2} = A_2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]$, $A_2 = \frac{2}{5}$.

Иногда при нахождении искомых коэффициентов удобно использовать комплексные корни полинома $Q(x)$. В данном случае из уравнения $x^2+1=0$ находим его корни $x=\pm i$. Используя, например, $x=i$ и подставляя его в равенство (12), получаем

$$i=(Mi+N)\left(i-\frac{1}{2}\right)^2$$

или

$$i=(Mi+N)\left(-1-i+\frac{1}{4}\right)=(Mi+N)\left(-\frac{3}{4}-i\right),$$

т. е.

$$i=\left(M-\frac{3}{4}N\right)+i\left(-\frac{3}{4}M-N\right).$$

Приравнивая теперь вещественные и мнимые части слева и справа, составим систему уравнений для определения M и N

$$0=M-\frac{3}{4}N.$$

$$1=-\frac{3}{4}M-N,$$

откуда $M=-\frac{12}{25}$, $N=-\frac{16}{25}$.

Осталось найти A_1. Можно, например, приравнять в (12) коэффициенты при старшей степени x, т. е. при x^3: $0=A_1+M$; откуда $A_1=-M=\frac{12}{25}$.

Итак,

$$J_1=\int\frac{\frac{12}{25}}{x-\frac{1}{2}}dx+\int\frac{\frac{2}{5}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx-\int\frac{\frac{12}{25}x+\frac{16}{25}}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{12}{25}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|-\frac{2}{5}\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-\frac{6}{25}\ln(x^2+1)-\frac{16}{25}\operatorname{arctg}x+C$$

и окончательно получим

$$J=\frac{\ln(x^2+1)}{4(1-2x)^2}+\frac{1}{10(2x-1)}-\frac{3}{50}\ln|2x-1|+$$

$$+\frac{3}{100}\ln(x^2+1)+\frac{2}{25}\operatorname{arctg}x+C.$$

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

36. $\int \frac{3x^2+17x+2}{(x-1)(x+2)(x+3)}\,dx$; 37. $\int \frac{x^2+x+2}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}\,dx$;

38. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$; 39. $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$;

40. $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$; 41. $J_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

§ 6. Метод Остроградского * (выделение рациональной части интеграла)

Пусть имеется правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где многочлен $Q(x)$ представлен по формуле (6). Запишем $Q(x)$ в виде $Q(x) = Q_1(x)\,Q_2(x)$, где $Q_2(x)$ содержит каждый множитель из $Q(x)$ в первой степени, а $Q_1 = \frac{Q}{Q_2}$, т. е.

$$Q_2(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\cdots(x^2+p_sx+q_s),$$

$$Q_1(x) = (x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2-1}\cdots(x-a_r)^{k_r-1}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s-1}.$$

М. В. Остроградский предложил следующую формулу для вычисления интеграла от правильной рациональной дроби:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \tag{13}$$

где $P_1(x)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами, степень которого на единицу ниже степени $Q_1(x)$, $P_2(x)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами, степень которого на единицу ниже степени $Q_2(x)$. Дифференцируя обе части равенства (13), находим

$$\frac{P}{Q} = \left[\frac{P_1}{Q_1}\right]' + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2} =$$

$$= \frac{P_1'Q_2 - P_1\frac{Q_1'Q_2}{Q_1} + P_2Q_1}{Q_1Q_2},$$

---

* М. В. Остроградский (1801—1861) — русский математик.

т. е.

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1'Q_2-P_1\dfrac{Q_1'Q_2}{Q_1}+P_2Q_1}{Q}. \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что $\dfrac{Q_1'Q_2}{Q_1}$ — многочлен, т. е. $Q_1'Q_2$ делится на Q_1 без остатка.

Имеем

$$P=P_1'Q_2-P_1\frac{Q_1'Q_2}{Q_1}+P_2Q_1. \tag{15}$$

Получено равенство двух многочленов. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе уравнений, из которой единственным образом определяются неопределенные коэффициенты, входящие в $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Замечание 1. Так как для окончательного вычисления интеграла необходимо еще проинтегрировать дробь $\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$, коэффициенты многочлена $P_2(x)$ фактически нет необходимости вычислять. Удобнее дробь $\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ сразу же записать в виде суммы простейших дробей, т. е. в виде

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{B_1}{x-a_2}+\ldots+\frac{H_1}{x-a_r}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+$$

$$+\ldots+\frac{R_1x+T_1}{x^2+p_sx+q_s},$$

и находить коэффициенты $A_1, B_1, \ldots, R_1, T_1$ (см. пример, приведенный ниже).

Замечание 2. Заметим, что многочлен $Q_1(x)$ представляет собой общий наибольший делитель многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$ (так как каждый кратный корень многочлена $Q(x)$ является корнем $Q'(x)$ кратности на единицу меньшей), поэтому $Q_1(x)$ может быть найден без отыскания корней многочлена $Q(x)$, а $Q_2(x)=\dfrac{Q(x)}{Q_1(x)}$, т. е. также вычисляется элементарно. Остается найти только корни $Q_2(x)$, причем эти корни простые.

Замечание 3. Формулой Остроградского удобно пользоваться тогда, когда у $Q(x)$ есть корни высокой кратности. По сравнению с общим методом разложения дроби на простейшие формула Остроградского дает особенно большую экономию вычислений тогда, когда разложение $Q(x)$ содержит трехчлены x^2+px+q в высоких степенях.

Пример. Вычислить $J=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

По методу Остроградского получаем

$$J=\frac{P_1(x)}{(x^4-1)^2}+\int\frac{P_2(x)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}dx=$$

$$=\frac{ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3+fx^2+gx+h}{(x^4-1)^2}+$$

$$+\int\left[\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\right]dx.$$

В результате дифференцирования имеем

$$\frac{1}{(x^4-1)^3}=\left[\frac{ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3+fx^2+gx+h}{(x^4-1)^2}\right]'+$$

$$+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

или

$$1=(7ax^6+6bx^5+5cx^4+4dx^3+3ex^2+2fx+g)(x^4-1)-$$
$$-(ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3+fx^2+gx+h)\,8x^3+$$
$$+[A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Mx+N)\times$$
$$\times(x^2-1)](x^4-1)^2. \qquad (16)$$

Полагая $x=1$, получим

$$1=-8(a+b+c+d+e+f+g+h).$$

Полагая $x=-1$, получим

$$1=8(-a+b-c+d-e+f-g+h).$$

Полагая $x=i$, приравнивая вещественные и мнимые части слева и справа, получим еще два уравнения

$$a-c+e-g=\frac{1}{8},$$

$$-b+d-f+h=0.$$

Из первых двух уравнений имеем

$$b+d+f+h=0,\quad a+c+e+g=-\frac{1}{8}.$$

Рассмотрим системы

$$\left.\begin{array}{r}b+d+f+h=0\\-b+d-f+h=0\end{array}\right\},\text{ откуда } b+f=d+h=0,$$

и

$$\left.\begin{aligned} a+c+e+g&=-\frac{1}{8} \\ a-c+e-g&=\frac{1}{8} \end{aligned}\right\}, \text{ откуда } \quad \begin{aligned} a+e&=0, \\ c+g&=-\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Далее будем сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x в равенстве (16):

$$\begin{aligned}
x^{11}&:\ 0 = A + B + M, \quad A + B + M = 0, \\
x^{10}&:\ 0 = 7a - 8a + A - B + N, \quad A - B + N = a, \\
x^{9}&:\ 0 = 6b - 8b + A + B - M, \quad A + B - M = 2b, \\
x^{0}&:\ 1 = -g + A - B - N, \quad A - B - N = 1 + g, \\
x^{3}&:\ 0 = -4d - 8h + A + B + M, \quad 4d = -8h, \quad d = -2h, \\
x^{1}&:\ 0 = -2f + A + B - M, \quad A + B - M = 2f, \\
x^{2}&:\ 0 = -3e + A - B + N, \quad A - B + N = 3e, \\
x^{4}&:\ 0 = -5c + g - 8g - 2(A - B - N), \ A - B - N = -\frac{5c+7g}{2}.
\end{aligned}$$

Решая систему, найдем

$$h = d = b = f = e = a = 0,$$

$$c = \frac{7}{32}, \quad g = -\frac{11}{32}, \quad A = \frac{21}{128},$$

$$B = -\frac{21}{128}, \quad M = 0, \ N = -\frac{21}{64}$$

и, окончательно,

$$J = \frac{7x^5 - 11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{21}{64}\operatorname{arctg} x + C.$$

В этом параграфе мы ограничимся одним примером для упражнений.

42. Вычислить

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}.$$

§ 7. Некоторые специальные приемы интегрирования дробно-рациональных функций

Хотя общий прием, разобранный в § 5, а также и метод Остроградского применимы к любым дробно-рациональным функциям, однако в отдельных случаях можно рекомендовать более удобные приемы интегрирования. Некоторые из таких приемов мы и изложим в этом параграфе.

I) Для интегралов вида $J = \int \frac{dx}{(x-a)^m (x-b)^n}$, где m; n — натуральные числа, $a \neq b$, рекомендуем подстановку $z = \frac{x-a}{x-b}$.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Вычислить $J = \int \frac{dx}{(x-2)^3 (x+1)^2}$.

Полагаем $z = \frac{x-2}{x+1}$, отсюда $1 - \frac{3}{x+1} = z$, $\frac{1}{x+1} = \frac{1-z}{3}$, $\frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{3}\,dz$; тогда

$$J = \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^3} \cdot \frac{1}{(x+1)^3} \cdot \frac{dx}{(x+1)^2} = \int \frac{1}{z^3} \left(\frac{1-z}{3}\right)^3 \frac{dz}{3} =$$

$$= \frac{1}{81} \int \left(\frac{1}{z} - 1\right)^3 dz = \frac{1}{81} \int \left(\frac{1}{z^3} - \frac{3}{z^2} + \frac{3}{z} - 1\right) dz =$$

$$= \frac{1}{81}\left(-\frac{1}{2z^2} + \frac{3}{z} + 3\ln|z| - z\right) + C =$$

$$= \frac{1}{81}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + 3\,\frac{x+1}{x-2} + 3\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{x-2}{x+1}\right] + C.$$

2. $J = \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 (x+1)^3}\,dx$.

Постараемся свести данный интеграл к интегралам предыдущего вида. С этой целью удобно сначала числитель подынтегрального выражения представить, например, так:

$$5x^2 + 6x + 9 = 5(x-3)^2 + 36(x-3) + 72$$

и разбить интеграл на сумму трех интегралов:

$$J = \int \frac{5(x-3)^2 + 36(x-3) + 72}{(x-3)^2 (x+1)^3}\,dx =$$

$$= \int \frac{5(x-3)^2}{(x-3)^2 (x+1)^3}\,dx + \int \frac{36(x-3)}{(x-3)^2 (x+1)^3}\,dx +$$

$$+ \int \frac{72}{(x-3)^2 (x+1)^3}\,dx = 5\int \frac{dx}{(x+1)^3} +$$

$$+ 36 \int \frac{dx}{(x-3)(x+1)^3} + 72 \int \frac{dx}{(x-3)^2 (x+1)^3} =$$

$$= -\frac{5}{2(x+1)^2} + 36J_1 + 72J_2.$$

Для вычисления J_1 и J_2 применим предыдущий прием. Положим $z=\frac{x+1}{x-3}$. Тогда $1+\frac{4}{x-3}=z$, $\frac{1}{x-3}=\frac{1}{4}(z-1)$, $\frac{dx}{(x-3)^2}=-\frac{1}{4}dz$ и

$$J_1=\int\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^3(x-3)^2}\cdot\frac{dx}{(x-3)^2}=-\frac{1}{64}\int\frac{z^2-2z+1}{z^3}dz=$$

$$=-\frac{1}{64}\left(\ln|z|+\frac{2}{z}-\frac{1}{2z^2}\right)+C,$$

где $z=\frac{x+1}{x-3}$.

Вычислим J_2, применяя ту же подстановку $z=\frac{x+1}{x-3}$; тогда

$$J_2=\int\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^3(x-3)^3}\cdot\frac{dx}{(x-3)^2}=-\frac{1}{4^4}\int\frac{z^3-3z^2+3z-1}{z^3}dz=$$

$$=-\frac{1}{256}\left(z-3\ln|z|-\frac{3}{2z}+\frac{1}{2z^2}\right)+C,$$

где снова $z=\frac{x+1}{x-3}$.

Подставляя выражения для J_1, J_2 в J, получим

$$J=-\frac{5}{2(x+1)^2}-\frac{9}{32}\cdot\frac{x+1}{x-3}-\frac{9}{32}\cdot\frac{x-3}{x+1}+$$

$$+\frac{9}{64}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2+\frac{9}{32}\ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right|+C.$$

II) Рассмотрим интеграл вида $J=\int\frac{x^n}{(x^m+b)^r}dx$, где m, n, r — натуральные числа, $r\geqslant 2$.

а) Если $n\geqslant m$, то применяем формулу интегрирования по частям, полагая $u=x^{n-m+1}$, $dv=\frac{x^{m-1}}{(x^m+b)^r}dx$. В результате такого интегрирования мы придем к интегралу, у которого степень двучлена в знаменателе понизится на единицу.

Если при этом степень числителя все же будет не ниже, чем m, то еще раз повторим изложенный прием и действуем так до тех пор, пока или степень числителя не окажется меньше m, или показатель r не станет равным единице. При $r=1$ применяем разложение на простейшие дроби.

б) Если $n<m-1$, то применяем подстановку $x=\frac{1}{z}$ и после этого оказываемся в условиях пункта а). Если же $n=m-1$, то интеграл вычисляется совершенно элементарно с помощью подстановки $t=x^m+b$.

Пример 3. $J=\int \frac{x^4}{(x^3+1)^3}\,dx.$

Положим $u=x^2$, $dv=\frac{x^2}{(x^3+1)^3}\,dx$. Тогда $du=2x\,dx$, $v=-\frac{1}{6(x^3+1)^2}$, отсюда

$$J=-\frac{x^2}{6(x^3+1)^2}+\frac{1}{3}\int\frac{x}{(x^3+1)^2}\,dx=-\frac{x^2}{6(x^3+1)^2}+\frac{1}{3}J_1.$$

Вычислим J_1, применяя подстановку $x=\frac{1}{z}$; получим $J_1=-\int\frac{z^3}{(z^3+1)^2}\,dz$. Для вычисления полученного интеграла применим формулу интегрирования по частям, полагая $u=z$, $dv=\frac{z^2}{(z^3+1)^2}\,dz$. Тогда $du=dz$, $v=-\frac{1}{3(z^3+1)}$ и

$$J_1=\frac{z}{3(z^3+1)}-\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z^3+1}=\frac{z}{3(z^3+1)}-\frac{1}{3}J_2.$$

J_2 вычислим с помощью разложения подынтегральной функции на простейшие дроби

$$J_2=\int\frac{dz}{z^3+1}=\int\frac{dz}{(z+1)(z^2-z+1)}=\int\left[\frac{A}{z+1}+\frac{Mz+N}{z^2-z+1}\right]dz.$$

Определим A, M, N из тождества

$$1=A(z^2-z+1)+(Mz+N)(z+1).$$

При $z=-1$ найдем $A=\frac{1}{3}$; M и N находим, решая систему

$$\left.\begin{aligned}0&=A+M,\\1&=A+N,\end{aligned}\right\}$$

откуда $M=-\frac{1}{3}$, $N=\frac{2}{3}$. Тогда

$$J_2=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z+1}+\int\frac{-\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}}{z^2-z+1}\,dz=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|z+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2z-1}{z^2-z+1}\,dz+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|z+1|-\frac{1}{6}\ln(z^2-z+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+C,$$

где $z=\frac{1}{x}$ и

$$J=-\frac{x^2}{6(x^3+1)^2}+\frac{x^2}{9(x^3+1)}-\frac{1}{27}\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|+$$

$$+\frac{1}{54}\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)-\frac{1}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2-x}{x\sqrt{3}}+C=$$

$$=-\frac{x^2}{6(x^3+1)^2}+\frac{x^2}{9(x^3+1)}-\frac{1}{27}\ln|x+1|+$$

$$+\frac{1}{54}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2-x}{x\sqrt{3}}+C.$$

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

43. $\int\frac{dx}{(x^2-3x+2)^3}$; 44. $\int\frac{7x^2+8x+9}{(x-2)^3(x+3)^2}dx$; 45. $\int\frac{x^6}{(x^2-5)^4}dx$.

§ 8. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Во многих случаях интегрирование выражений, содержащих иррациональные функции, с помощью надлежащим образом выбранных подстановок удается свести к интегрированию рациональных функций. Этот прием называют *рационализацией подынтегрального выражения.*

I) Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$, где R — рациональная функция двух аргументов,* m — натуральное число, α, β, γ, δ — постоянные.

Рационализация подынтегрального выражения достигается подстановкой

$$\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}=t,\text{ т. е. }\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^m\text{ или }x=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}.$$

Действительно, из написанных формул видно, что x, а вместе с ним и dx, выражаются через t рационально.

Если подынтегральная функция имеет вид

$$R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s, \ldots, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^t\right),$$

где R — рациональная функция аргументов x, $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r$, $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s$, ..., $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^t$, а числа $r, s, \ldots, t$ — рациональные,

---

* Рациональной функцией двух аргументов называется функция вида $R(x, y)=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — полиномы от x, y, т. е. суммы вида $\sum\limits_{k, l} c_{k, l}x^k y^l$, где число слагаемых конечно.

то показатели r, s, ..., t приводят к общему знаменателю. Пусть это будет m. Тогда все радикалы, входящие в подынтегральную функцию, легко выразить через $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, и данный интеграл сводится к интегралу рассмотренного выше вида

$$\int R_1\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx,$$

где R_1 — некоторая новая рациональная функция.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Вычислить $J=\int\frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Здесь дробь $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ равна x, т. е. $\alpha=\delta=1$, $\beta=\gamma=0$. Так как $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, а общий знаменатель дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ есть 6, то рационализация подынтегрального выражения достигается подстановкой $\sqrt[6]{x}=t$, откуда $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$. Тогда

$$J=\int\frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}=6\int\frac{dt}{t\,(1+t^2+2t^3)}=$$

$$=6\int\frac{dt}{t\,(t+1)\,(2t^2-t+1)}=3\int\frac{dt}{t\,(t+1)\left(t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)}.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{1}{t\,(t+1)\left(t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Mt+N}{t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$1=A\,(t+1)\left(t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+Bt\left(t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+$$
$$+(Mt+N)\,t\,(t+1).$$

Полагая $t=0$, получим $A=2$; полагая $t=-1$, получим $B=-\frac{1}{2}$. M и N найдем из следующей системы:

$$t^3:\ 0=A+B+M,$$

$$t:\ 0=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+N,$$

а именно $M = -\frac{3}{2}$, $N = \frac{1}{4}$. Итак,

$$J = 3\int\left[\frac{2}{t} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{-\frac{3}{2}t + \frac{1}{4}}{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}\right]dt = 6\ln|t| -$$

$$-\frac{3}{2}\ln|t+1| - \frac{9}{4}\int\frac{2t - \frac{1}{2}}{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}\,dt - \frac{3}{8}\int\frac{d\left(t - \frac{1}{4}\right)}{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} =$$

$$= 6\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|t+1| - \frac{9}{4}\ln\left(t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) -$$

$$-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C,$$

где вместо t нужно подставить $\sqrt[6]{x}$.

2. Вычислить $J = \int\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\,dx$.

Разделив числитель и знаменатель подынтегрального выражения, например, на $\sqrt{x-1}$, получим дробь $\dfrac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}$, т. е. функцию вида $R\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$. Положим $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, откуда $\frac{x+1}{x-1} = t^2$, $1 + \frac{2}{x-1} = t^2$, $\frac{2}{x-1} = t^2 - 1$, $x - 1 = \frac{2}{t^2-1}$, $x = \frac{1+t^2}{t^2-1}$, $dx = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,dt$. Тогда

$$J = \int\frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,dt = -4\int\frac{t}{(t-1)(t+1)^3}\,dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{t}{(t-1)(t+1)^3} = \frac{A}{t-1} + \frac{B_1}{t+1} + \frac{B_2}{(t+1)^2} + \frac{B_3}{(t+1)^3};$$

отсюда

$$t = A(t+1)^3 + B_1(t-1)(t+1)^2 + B_2(t-1)(t+1) + B_3(t-1).$$

При $t = 1$ найдем $A = \frac{1}{8}$, при $t = -1$ найдем $B_3 = \frac{1}{2}$. Коэффициенты B_1, B_2 найдем из следующей системы:

$$t^3:\ 0 = A + B_1,$$
$$t^0:\ 0 = A - B_1 - B_2 - B_3,$$

а именно $B_1 = -\frac{1}{8}$, $B_2 = -\frac{1}{4}$. Тогда

$$J = -4\int\left[\frac{\frac{1}{8}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{8}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{4}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(t+1)^3}\right]dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{t}{(t+1)^2} + C,$$

где вместо t нужно подставить $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

II) Интегрирование биномных дифференциалов, т. е. выражений вида $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, где m, n, p — рациональные числа, a, b — любые постоянные.

Укажем приемы рационализации биномного дифференциала.

1) Если p — целое, а λ — общий знаменатель дробей m и n, то рационализация достигается подстановкой $x = t^\lambda$ $\left(\text{или } x^{\frac{1}{\lambda}} = t\right)$ (см. I).

2) Если же p — дробное, то проводим следующие преобразования: полагаем $x^n = z$; тогда

$$dz = nx^{n-1}\,dx,\ dx = \frac{1}{n} z^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} dz,\ x^m = z^{\frac{m}{n}}$$

и

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m}{n}}(a+bz)^p z^{\frac{1}{n}-1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}\,dz = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^q\,dz,$$

где $q = \frac{m+1}{n} - 1$. Если при этом окажется, что q целое, т. е. $\frac{m+1}{n}$ целое, то рационализация подынтегрального выражения достигается подстановкой $a + bz = t^\lambda$, где λ — знаменатель числа p (см. I). Иными словами, применяется подстановка $a + bx^n = t^\lambda$.

3) Пусть теперь оба числа p и q не целые. В этом случае из равенства

$$(a+bz)^p z^q\,dz = \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}\,dz$$

сразу видно, что если $p+q$ целое, т. е. $p + \frac{m+1}{n}$ целое, то рационализация подынтегрального выражения достигается подстановкой $\frac{a+bz}{z}=t^{\lambda}$, т. е. $ax^{-n}+b=t^{\lambda}$, где λ — опять знаменатель числа p.

П. Л. Чебышевым было доказано, что **только в этих трех случаях**, т. е. если одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $p+\frac{m+1}{n}$ целое, интеграл от биномного дифференциала выражается в виде элементарных функций.

Рассмотрим несколько примеров.

$$3.\quad J=\int\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}\,dx=\int x\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Имеем $m=1$, $n=\frac{2}{3}$, $p=-\frac{1}{2}$. Таким образом, мы находимся в условиях случая 2). Полагаем $1+x^{\frac{2}{3}}=t^2$ или $x^{\frac{2}{3}}=t^2-1$. Отсюда $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx=2t\,dt$, $x^{-\frac{1}{3}}dx=3t\,dt$. Тогда

$$J=\int x^{\frac{4}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}dx=\int(t^2-1)^2t^{-1}3t\,dt=$$

$$=3\int(t^4-2t^2+1)\,dt=3\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right)+C,$$

где вместо t нужно подставить $\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}$.

$$4.\quad J=\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx.$$

Имеем $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-2$. Мы находимся в условиях случая 1) и потому применим подстановку $x^{\frac{1}{6}}=t$. Тогда $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$ и $J=6\int\frac{t^8}{(1+t^2)^2}\,dt$.

Этот интеграл вычислим используя прием, указанный в п. II, § 7.

$$J=-3\int t^7d\left(\frac{1}{t^2+1}\right)=-3\left\{\frac{t^7}{t^2+1}-\int\frac{7t^6}{t^2+1}dt\right\}=$$

$$=-\frac{3t^7}{t^2+1}+21\int\frac{t^6}{t^2+1}\,dt.$$

Представим t^6 в виде

$$t^6=t^4\,(t^2+1)-t^2\,(t^2+1)+(t^2+1)-1,$$

тогда

$$J=-\frac{3t^7}{t^2+1}+21\int\frac{t^4(t^2+1)-t^2(t^2+1)+(t^2+1)-1}{t^2+1}dt=$$

$$=-\frac{3t^7}{t^2+1}+21\int\left(t^4-t^2+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=-\frac{3t^7}{t^2+1}+\frac{21}{5}t^5-7t^3+21t-21\,\mathrm{arctg}\,t+C,$$

где вместо t нужно подставить $\sqrt[6]{x}$.

5. $J=\int\sqrt{x^3+x^4}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx.$

Имеем $m=\frac{3}{2}$, $n=1$, $p=\frac{1}{2}$, следовательно $p+\frac{m+1}{n}=3$ (случай 3). Представим J в виде

$$J=\int x^2\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Рационализация подынтегрального выражения достигается подстановкой $\frac{1+x}{x}=t^2$. Отсюда $x^{-1}+1=t^2$, $\frac{1}{x}=t^2-1$, $x=$ $=\frac{1}{t^2-1}$, $x^2=\frac{1}{(t^2-1)^2}$, $dx=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt$, тогда

$$J=-2\int\frac{t^2}{(t^2-1)^4}\,dt.$$

Для вычисления полученного интеграла применим формулу интегрирования по частям, полагая $u=t$, $dv=\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^4}$. Тогда $du=dt$, $v=\frac{1}{3}\,\frac{1}{(t^2-1)^3}$,

$$J=\frac{t}{3(t^2-1)^3}-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t^2-1)^3}=\frac{t}{3(t^2-1)^3}-\frac{1}{3}J_1.$$

Вычислим $J_1=\int\frac{dt}{(t^2-1)^3}=\int\frac{dt}{(t-1)^3(t+1)^3}$ с помощью подстановки $\frac{t+1}{t-1}=z$ (см. § 7, I). Тогда $1+\frac{2}{t-1}=z$, отсюда $\frac{1}{t-1}=\frac{1}{2}(z-1)$, $\frac{dt}{(t-1)^2}=-\frac{1}{2}dz$ и

$$J_1=\int\frac{1}{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^3}\cdot\frac{1}{(t-1)^4}\cdot\frac{dt}{(t-1)^2}=\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{z-1}{2}\right)^4\left(-\frac{dz}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{32}\int\frac{z^4-4z^3+6z^2-4z+1}{z^3}\,dz=$$

$$=-\frac{1}{32}\int\left(z-4+\frac{6}{z}-\frac{4}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right)dz=$$

$$=-\frac{1}{32}\left(\frac{1}{2}z^2-4z+6\ln|z|+\frac{4}{z}-\frac{1}{2z^2}\right)+C,$$

где z нужно заменить на $\frac{t+1}{t-1}$. Подставляя выражение для J_1 в J, окончательно получим

$$J=\frac{t}{3(t^2-1)^3}+\frac{1}{96}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2-4\frac{t+1}{t-1}+6\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\right.$$

$$\left.+4\frac{t-1}{t+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2\right]+C,$$

где вместо t нужно подставить $\sqrt{\frac{1+x}{x}}$.

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

46. $\int\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x}+2}dx$; 47. $\int\sqrt[3]{\frac{2+x}{3-x}}dx$;

48. $\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$; 49. $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$;

50. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$; 51. $\int\frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$.

§ 9. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Этот параграф посвящен вычислению интегралов вида

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

где R — рациональная функция двух аргументов. Интегралы от функций, содержащих корни более высокой степени из квадратного трехчлена, мы не рассматриваем.

Мы изложим два способа вычисления таких интегралов.

I. Подстановки Эйлера

Так называются приводимые ниже три подстановки, с помощью которых удается избавиться от иррациональности в интегралах рассматриваемого здесь типа.

1) Если $a>0$, положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x$. Тогда $ax^2+bx+c=t^2-2\sqrt{a}\,tx+ax^2$. Заметим, что члены, со-

держащие x^2, взаимно уничтожаются, и x (а, следовательно, и dx) рационально выражается через t

$$x=\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}\,t}.$$

2) Если $c>0$, то можно положить

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}.$$

Однако вместо этого можно подстановкой $x=\frac{1}{z}$ свести задачу к случаю 1).

3) Если трехчлен ax^2+bx+c имеет различные вещественные корни x_1 и x_2, то полагают $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\,(x-x_1)$.

Отсюда, так как

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

то

$$a(x-x_1)(x-x_2)=t^2(x-x_1)^2,$$

$$t^2=\frac{a(x-x_2)}{x-x_1},\qquad x=\frac{t^2x_1-ax_2}{t^2-a}.$$

Заметим, что если требовать, чтобы трехчлен ax^2+bx+c хоть на некотором промежутке имел положительные значения (мы ведь занимаемся интегрированием функций только с вещественными значениями!), то по крайней мере один из трех указанных случаев обязательно реализуется. Действительно, если трехчлен не имеет различных вещественных корней, то он сохраняет постоянный знак на всей оси, а чтобы его значения были всюду неотрицательны, необходимо должно быть $a>0$.

Во всех трех случаях мы приходим к рациональному выражению x через t и в результате подстановки мы получим интеграл от рациональной функции. Тем самым доказано, что любой интеграл рассматриваемого типа может быть выражен в виде элементарных функций. Однако подстановки Эйлера, как правило, приводят к длинным вычислениям. Сравнительно удобнее применять их в случае, если числитель подынтегральной функции — постоянная.

Приведем один пример:

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.$$

Уже известный нам результат (см. в конце § 1) легко может быть получен с помощью 1-й подстановки Эйлера

$$\sqrt{x^2+m}=t-x.$$

Отсюда

$$x^2+m=t^2-2tx+x^2$$

и

$$x = \frac{t^2 - m}{2t} = \frac{t}{2} - \frac{m}{2t}.$$

Тогда

$$dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2t^2}\right) dt = \frac{t^2 + m}{2t^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2 + m} = t - x = \frac{t}{2} + \frac{m}{2t}.$$

Поэтому

$$J = \int \frac{(t^2 + m) 2t}{2t^2 (t^2 + m)} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C =$$

$$= \ln |x + \sqrt{x^2 + m}| + C,$$

и мы снова получили формулу, которую раньше мы проверяли непосредственным дифференцированием.

II. Другой прием вычисления.

Положим $\sqrt{ax^2 + bx + c} = y$. Тогда, замечая, что y^2 выражается через x рационально в виде квадратного трехчлена, легко понять, что подынтегральная функция $R(x, y)$ может быть приведена к виду

$$\frac{P_1(x) + P_2(x) y}{P_3(x) + P_4(x) y}, \tag{17}$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ — многочлены.

Умножим числитель и знаменатель на выражение $P_3(x) - P_4(x) y$; тогда

$$R(x, y) = \frac{(P_1(x) + P_2(x) y)(P_3(x) - P_4(x) y)}{(P_3(x) + P_4(x) y)(P_3(x) - P_4(x) y)} =$$

$$= \frac{P_1(x) P_3(x) - P_2(x) P_4(x) y^2 + [P_2(x) P_3(x) - P_1(x) P_4(x)] y}{P_3^2(x) - y^2 \cdot P_4^2(x)} =$$

$$= \frac{Q_1(x) + Q_2(x) y}{Q_3(x)},$$

где $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ — многочлены. Если разделим числитель почленно на $Q_3(x)$, то получим

$$R(x, y) = R_1(x) + R_2(x) y,$$

где $R_1(x)$, $R_2(x)$ — дробно-рациональные функции и, следовательно,

$$J = \int R(x, y) dx = \int R_1(x) dx + \int R_2(x) y dx.$$

Вычислять первый интеграл мы умеем (это — интеграл от дробно-рациональной функции). Со вторым интегралом поступим следующим образом. Так как

$$R_2(x)\,y = \frac{R_2(x)\,y^2}{y} = \frac{R_3(x)}{y},$$

где $R_3(x)$ — дробно-рациональная функция, то второй интеграл приводится к виду $\int \frac{R_3(x)}{y}\,dx$. Из $R_3(x)$ выделим целую часть, пусть это будет $P(x)$, что приводит к интегралу вида

$$(A)\ \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

Далее, остается правильная рациональная дробь, которую раскладываем обычным образом на простейшие дроби, что приводит к вычислению интегралов вида:

$$(Б)\ \int \frac{A}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \quad k=1,\ 2,\ldots,$$

$$(B)\ \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \quad \frac{p^2}{4}-q<0, \quad m=1,\ 2,\ldots.$$

Рассмотрим интегралы всех этих видов. Для вычисления интеграла (А) можно использовать формулу

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (18)$$

где $Q(x)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами степени на единицу меньшую, чем степень $P(x)$, λ — неизвестная постоянная.

Дифференцируя равенство (18), получим

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + Q(x)\,\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \\ + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

или

$$P(x) = Q'(x)(ax^2+bx+c) + Q(x)\left(ax+\frac{b}{2}\right) + \lambda. \quad (19)$$

В обеих частях равенства стоят многочлены. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в этих многочленах, мы придем к системе уравнений для определения неизвестных коэффициентов многочлена Q и λ. Что касается последнего интеграла в равенстве (18), то, выделяя из трехчлена ax^2+bx+c полный квадрат, мы легко сведем этот интеграл к уже известным: к интегралу из примера в пункте I при $a > 0$ или к табличному VII′ (§ 3) при $a < 0$.

Интеграл вида (Б) сводится к интегралу вида (А) с помощью подстановки $x - \alpha = \frac{1}{z}$.

Остается интеграл вида (В). Сначала рассмотрим некоторые частные случаи.

1) $p = b = 0$. В этом случае мы имеем интеграл

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+q)^m \sqrt{ax^2+c}}\,dx = \int \frac{Mx}{(x^2+q)^m \sqrt{ax^2+c}}\,dx + \int \frac{N}{(x^2+q)^m \sqrt{ax^2+c}}\,dx = J_1 + J_2.$$

Рационализация подынтегрального выражения в J_1 достигается подстановкой $ax^2 + c = u^2$, тогда

$$Mxdx = \frac{M}{2a}\,d\,(ax^2+c) = \frac{M}{a}\,u\,du.$$

Для рационализации подынтегрального выражения в J_2 предлагается подстановка Абеля *: за новую переменную принимается производная от функции $\sqrt{ax^2+c}$, т. е.

$$z = (\sqrt{ax^2+c})' = \frac{ax}{\sqrt{ax^2+c}},$$

или $z\sqrt{ax^2+c} = ax$.

Продифференцируем последнее равенство

$$\sqrt{ax^2+c}\,dz + z\,(\sqrt{ax^2+c})'\,dx = a\,dx.$$

Учитывая, что $(\sqrt{ax^2+c})' = z$, получим

$$\sqrt{ax^2+c}\,dz + z^2\,dx = a\,dx;$$

отсюда

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+c}} = \frac{dz}{a - z^2}. \tag{20}$$

Кроме того, x^2 рационально выражается через z^2

$$x^2 = \frac{cz^2}{a\,(a - z^2)}. \tag{21}$$

В результате всех преобразований получается интеграл от рациональной функции.

---

* Н. Г. Абель (1802—1829) — норвежский математик.

2) $p=\frac{b}{a}$. Тогда интеграл (B) подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$ сводится к рассмотренному выше в случае 1), т. е. коэффициенты при первой степени t будут равны нулю.

3) Теперь перейдем к случаю, когда $p\neq\frac{b}{a}$. Применим дробно-линейную подстановку $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$, причем выберем α и β так, чтобы после замены переменной коэффициенты при первой степени в квадратных трехчленах равнялись нулю. Имеем

$$x^2+px+q=\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right)^2+p\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right)+q=$$

$$=\frac{(\alpha^2+p\alpha+q)\,t^2+[2\alpha\beta+p\,(\alpha+\beta)+2q]\,t+(\beta^2+p\beta+q)}{(t+1)^2},$$

$$ax^2+bx+c=a\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right)^2+b\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right)+c=$$

$$=\frac{(a\alpha^2+b\alpha+c)\,t^2+[2\alpha\beta a+b\,(\alpha+\beta)+2c]\,t+(a\beta^2+b\beta+c)}{(t+1)^2}.$$

Следовательно, коэффициенты α, β должны определяться из условий

$$2\alpha\beta+p\,(\alpha+\beta)+2q=0,$$
$$2\alpha\beta a+b\,(\alpha+\beta)+2c=0,$$

отсюда $\alpha+\beta=-\frac{2\,(aq-c)}{ap-b}$; $\alpha\beta=\frac{bq-cp}{ap-b}$. Таким образом, α и β — корни квадратного уравнения $(ap-b)\cdot\zeta^2+2\,(aq-c)\,\zeta+(bq-cp)=0$. Можно показать, что дискриминант этого уравнения больше нуля, поэтому данное квадратное уравнение имеет два различных вещественных корня. Принимая их за α и β, мы сведем нашу задачу вычисления интеграла (B) к случаю 1).

Рассмотрим несколько примеров.

1. Вычислить интеграл

$$J=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx.$$

Подынтегральная функция имеет вид (17), поэтому сразу избавляемся от иррациональности в знаменателе и получаем

$$J=\int\frac{2x^2+3x+2-2x\sqrt{x^2+3x+2}}{-3x-2}\,dx=$$

$$=-\int\frac{2x^2+3x+2}{3x+2}\,dx+2\int\frac{x\sqrt{x^2+3x+2}}{3x+2}\,dx=J_1+2J_2.$$

Подынтегральную функцию в J_1 представим следующим образом:

$$\frac{2x^2+3x+2}{3x+2}=\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}+\frac{\frac{8}{9}}{3x+2};$$

отсюда

$$J_1=-\int\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}\right)dx-\frac{8}{9}\int\frac{dx}{3x+2}=$$

$$=-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{9}x-\frac{8}{27}\ln|3x+2|+C.$$

Для вычисления J_2 переведем иррациональность согласно изложенному выше методу снова в знаменатель. Получим

$$J_2=\int\frac{x(x^2+3x+2)}{(3x+2)\sqrt{x^2+3x+2}}dx,$$

но

$$\frac{x(x^2+3x+2)}{3x+2}=\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{9}x+\frac{4}{27}-\frac{8}{27(3x+2)}.$$

Следовательно,

$$J_2=\frac{1}{27}\int\frac{9x^2+21x+4}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx-\frac{8}{27}\int\frac{dx}{(3x+2)\sqrt{x^2+3x+2}}=$$

$$=\frac{1}{27}J_3-\frac{8}{27}J_4.$$

Вычисляем

$$J_3=\int\frac{9x^2+21x+4}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx.$$

По формуле (18) имеем

$$J_3=(Ax+B)\sqrt{x^2+3x+2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}.$$

Неопределенные коэффициенты находятся из равенства двух многочленов (см. формулу (19))

$$9x^2+21x+4=A(x^2+3x+2)+\frac{1}{2}(Ax+B)(2x+3)+\lambda.$$

Запишем систему уравнений для определения A, B, λ:

$$\left.\begin{aligned} x^2\colon&\quad 9=2A,\\ x\colon&\quad 21=\frac{9}{2}A+B,\\ x^0\colon&\quad 4=2A+\frac{3}{2}B+\lambda,\end{aligned}\right\}$$

отсюда $A=\frac{9}{2}$, $B=\frac{3}{4}$, $\lambda=-\frac{49}{8}$. Тогда

$$J_3=\left(\frac{9}{2}x+\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+3x+2}-\frac{49}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=$$

$$=\frac{3}{4}(6x+1)\sqrt{x^2+3x+2}-$$

$$-\frac{49}{8}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+2}\right|+C.$$

Рассмотрим

$$J_4=\int\frac{dx}{(3x+2)\sqrt{x^2+3x+2}}.$$

Это — интеграл вида (Б). Применим подстановку $3x+2=\frac{1}{z}$; тогда

$$x=\frac{1-2z}{3z},\quad dx=-\frac{dz}{3z^2},\quad x^2+3x+2=\frac{4z^2+5z+1}{9z^2}.$$

Ограничиваясь промежутком, где $3x+2>0$ (а тогда и $z>0$), имеем

$$J_4=-\int\frac{dz}{\sqrt{4z^2+5z+1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{\left(z+\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|z+\frac{5}{8}+\sqrt{z^2+\frac{5}{4}z+\frac{1}{4}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{3x+2}+\frac{5}{8}+\frac{3}{2(3x+2)}\sqrt{x^2+3x+2}\right|+C.$$

Итак,

$$J=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{9}x-\frac{8}{27}\ln|3x+2|+$$

$$+\frac{1}{18}(6x+1)\sqrt{x^2+3x+2}-\frac{49}{108}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{x^2+3x+2}\right|+\frac{8}{27}\ln\left|\frac{1}{3x+2}+\frac{5}{8}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2(3x+2)}\sqrt{x^2+3x+2}\right|+C.$$

2. $J=\int \frac{2x+1}{(x^2-x+2)\sqrt{2x^2-2x+1}}\,dx.$

Здесь мы имеем интеграл вида (В), причем $p=\frac{b}{a}$. Положим $x-\frac{1}{2}=t$. Тогда $x=t+\frac{1}{2}$, $2x+1=2t+2$, $dx=dt$. Следовательно,

$$J=\int \frac{2t+2}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)\sqrt{2t^2+\frac{1}{2}}}\,dt.$$

Мы пришли к интегралу вида (В), в котором отсутствуют члены с t в первой степени. Тогда запишем

$$J=J_1+2J_2=\int \frac{2t\,dt}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)\sqrt{2t^2+\frac{1}{2}}}+$$
$$+2\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)\sqrt{2t^2+\frac{1}{2}}}.$$

При вычислении J_1 сделаем замену переменной по формуле $2t^2+\frac{1}{2}=z^2$. Тогда $4t\,dt=2z\,dz$ или $2t\,dt=z\,dz$ и $t^2=\frac{2z^2-1}{4}$, $t^2+\frac{7}{4}=\frac{2z^2+6}{4}=\frac{z^2+3}{2}$, а

$$J_1=\int \frac{2}{z^2+3}dz=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}+C.$$

При вычислении J_2 применим подстановку Абеля, полагая $\left(\sqrt{2t^2+\frac{1}{2}}\right)'=u$, тогда по формулам (20) и (21)

$$\frac{dt}{\sqrt{2t^2+\frac{1}{2}}}=\frac{du}{2-u^2},\quad t^2=\frac{u^2}{4(2-u^2)},\quad t^2+\frac{7}{4}=\frac{7-3u^2}{2(2-u^2)}$$

и

$$J_2=\int \frac{2}{7-3u^2}du=-\frac{2}{3}\int \frac{du}{u^2-\frac{7}{3}}=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{u\sqrt{3}-\sqrt{7}}{u\sqrt{3}+\sqrt{7}}\right|+C.$$

Следовательно,

$$J=J_1+2J_2=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{u\sqrt{3}-\sqrt{7}}{u\sqrt{3}+\sqrt{7}}\right|+C.$$

Учитывая, что $z=\sqrt{2t^2+\frac{1}{2}}$, $u=\left(\sqrt{2t^2+\frac{1}{2}}\right)'$, $t=x-\frac{1}{2}$, окончательно получим

$$J=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{\sqrt{3}}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}(2x-1)-\sqrt{7}\sqrt{2x^2-2x+1}}{\sqrt{3}(2x-1)+\sqrt{7}\sqrt{2x^2-2x+1}}\right|+C.$$

3. $$J=\int\frac{x-1}{(4x^2+5x+4)\sqrt{3x^2-4x+3}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{x-1}{\left(x^2+\frac{5}{4}x+1\right)\sqrt{3x^2-4x+3}}\,dx.$$

Согласно теории, относящейся к интегралу типа (B), применим дробно-линейную подстановку $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$, причем α и β определяются из уравнения

$$(ap-b)\zeta^2+2(aq-c)\zeta+(bq-cp)=0,$$

где $p=\frac{5}{4}$, $q=1$, $a=3$, $b=-4$, $c=3$. Таким образом, в нашем примере это уравнение имеет вид $\frac{31}{4}\zeta^2-\frac{31}{4}=0$, откуда $\zeta^2=1$ или $\alpha=1$, $\beta=-1$. Следовательно, применяем дробно-линейную подстановку $x=\frac{t-1}{t+1}$. Тогда

$$4x^2+5x+4=\frac{13t^2+3}{(t+1)^2},$$

$$3x^2-4x+3=\frac{2t^2+10}{(t+1)^2},\quad x-1=-\frac{2}{t+1},$$

а отсюда $dx=\frac{2}{(t+1)^2}\,dt$ и

$$z=-2\sqrt{2}\int\frac{dt}{(13t^2+3)\sqrt{t^2+5}}.$$

Теперь положим $z=(\sqrt{t^2+5})'=\frac{t}{\sqrt{t^2+5}}$; тогда опять с помощью формул (20) и (21) находим

$$\frac{dz}{1-z^2}=\frac{dt}{\sqrt{t^2+5}},\quad 13t^2+3=\frac{62z^2+3}{1-z^2}$$

и

$$J=-2\sqrt{2}\int\frac{dz}{62z^2+3}=-\frac{2}{\sqrt{93}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{62}}{\sqrt{3}}+C.$$

Учитывая, что

$$z=\frac{t}{\sqrt{t^2+5}},\quad t=\frac{1+x}{1-x},$$

окончательно получим

$$J=-\frac{2}{\sqrt{93}}\operatorname{arctg}\frac{(x+1)\sqrt{31}}{\sqrt{3}\sqrt{3x^2-4x+3}}+C.$$

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

52. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+2)^3\sqrt{x^2+2x}}$; 53. $\displaystyle\int\frac{x+3}{(x^2+2x+3)^{7/2}}\,dx$;

54. $\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx$; 55. $\displaystyle\int\frac{x^3+x+1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$;

56. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{(x-1)^2}\,dx$; 57. $\displaystyle\int\frac{x^2}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$;

58. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+2x+3}}$; 59. $\displaystyle\int\frac{x^3}{(x^2-1)\sqrt{x^2+2x+4}}\,dx$;

60. $\displaystyle\int\frac{x}{(3x^2+2x+3)\sqrt{4x^2-2x+4}}\,dx$.

§ 10. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

Основной метод, использованный в предыдущих параграфах при интегрировании иррациональных выражений, заключался в рационализации подынтегральной функции. Этот же прием применяется и при интегрировании некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции.

I. Рассмотрим интеграл

$$J=\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx,$$

где R — рациональная функция двух переменных. Применим подстановку

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\tag{22}$$

считая при этом, что $-\pi<x<\pi$. Отсюда

$$x=2\operatorname{arctg}t,\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Таким образом,

$$J=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int R_1(t)\,dt,$$

где R_1 — рациональная функция от t.

Отметим, что подстановка (22) часто приводит к сложным выкладкам. В ряде случаев рационализация подынтегрального выражения может быть достигнута с помощью других, более простых подстановок. Приведем важнейшие из этих случаев.

II. Если подынтегральная функция имеет вид

$$R_1(\sin x)\cos x,$$

где R_1 — рациональная функция одного аргумента, то применяется подстановка $t=\sin x$. Действительно,

$$J=\int R_1(\sin x)\cos dx=\int R_1(\sin x)\,d(\sin x)=\int R_1(t)\,dt.$$

III. Аналогично, если подынтегральная функция имеет вид

$$R_1(\cos x)\sin x,$$

то применяется подстановка $t=\cos x$.

IV. Если подынтегральная функция выражается рационально через $\operatorname{tg} x$, т. е. имеет вид $R_1(\operatorname{tg} x)$, где R_1 — по-прежнему рациональная функция одного аргумента, то возможна подстановка $t=\operatorname{tg} x$. Действительно, отсюда следует, что $dt=\frac{dx}{\cos^2 x}=$ $=(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx$ или $dx=\frac{dt}{1+t^2}$, а

$$J=\int R_1(\operatorname{tg} x)\,dx=\int\frac{R_1(t)}{1+t^2}\,dt=\int R_2(t)\,dt,$$

где R_2 — тоже рациональная функция одного аргумента.

Рассмотрим несколько примеров.

1. $J=\int\frac{dx}{5+4\sin x}$.

Применяя подстановку (22), имеем

$$J=2\int\frac{dt}{5t^2+8t+5}=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5t+4}{3}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$J=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right)+C.$$

2. $J=\int\frac{dx}{(3+\cos 5x)\sin 5x}$.

Сначала сделаем подстановку $5x = t$, тогда

$$J = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{(3 + \cos t) \sin t}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{(3 + \cos t) \sin t} = \frac{\sin t}{(3 + \cos t) \sin^2 t} = \frac{\sin t}{(3 + \cos t)(1 - \cos^2 t)}.$$

Следовательно, мы находимся в условиях случая III и можно применить подстановку $z = \cos t$. Тогда

$$J = -\frac{1}{5} \int \frac{dz}{(3 + z)(1 - z^2)} = \frac{1}{5} \int \frac{dz}{(z - 1)(z + 1)(z + 3)} =$$

$$= \frac{1}{5} \int \left(\frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z + 1} + \frac{C}{z + 3} \right) dz.$$

Коэффициенты A, B, C находим по формуле (11) из § 5: $A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{8}$. Следовательно,

$$J = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{8} \ln |z - 1| - \frac{1}{4} \ln |z + 1| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8} \ln |z + 3| \right) + C = \frac{1}{40} \ln \left| \frac{(z - 1)(z + 3)}{(z + 1)^2} \right| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$J = \frac{1}{40} \ln \left| \frac{\cos^2 5x + 2 \cos 5x - 3}{(\cos 5x + 1)^2} \right| + C.$$

3. $J = \int \frac{dx}{3 \operatorname{tg} x + \cos x}$.

Заметим, что

$$\frac{1}{3 \operatorname{tg} x + \cos x} = \frac{\cos x}{3 \sin x + \cos^2 x} = \frac{\cos x}{3 \sin x + 1 - \sin^2 x} = R_1 (\sin x) \cos x,$$

поэтому применяем подстановку $\sin x = t$. Тогда

$$J = -\int \frac{d \sin x}{\sin^2 x - 3 \sin x - 1} = -\int \frac{dt}{t^2 - 3t - 1} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{t - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}}{t - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}} \right| +$$

$$+ C = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2t - 3 + \sqrt{13}}{2t - 3 - \sqrt{13}} \right| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$J=\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\sin x-3+\sqrt{13}}{2\sin x-3-\sqrt{13}}\right|+C.$$

4. $J=\int\frac{3\cos x+4\sin x}{5\cos x+2\sin x}dx.$

Подынтегральная функция имеет вид

$$\frac{3\cos x+4\sin x}{5\cos x+2\sin x}=\frac{3+4\operatorname{tg}x}{5+2\operatorname{tg}x}=R_1(\operatorname{tg}x),$$

поэтому произведем подстановку $t=\operatorname{tg}x$. Тогда, как мы знаем, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ и

$$J=\int\frac{3+4t}{5+2t}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=2\int\frac{\frac{3}{4}+t}{\left(t+\frac{5}{2}\right)(t^2+1)}dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{t+\frac{3}{4}}{\left(t+\frac{5}{2}\right)(t^2+1)}=\frac{A}{t+\frac{5}{2}}+\frac{Bt+C}{t^2+1},$$

отсюда

$$t+\frac{3}{4}=A(t^2+1)+(Bt+C)\left(t+\frac{5}{2}\right).$$

Подставляя $t=-\frac{5}{2}$, найдем $A=-\frac{7}{29}$. Коэффициенты B и C определяются из системы уравнений

$$A+B=0,$$

$$A+\frac{5}{2}C=\frac{3}{4},$$

а именно: $B=\frac{7}{29}$, $C=\frac{23}{58}$. Итак,

$$J=2\int\frac{-\frac{7}{29}}{t+\frac{5}{2}}dt+2\int\frac{\frac{7}{29}t+\frac{23}{58}}{t^2+1}dt=$$

$$=-\frac{14}{29}\ln\left|t+\frac{5}{2}\right|+\frac{7}{29}\ln(t^2+1)+\frac{23}{29}\operatorname{arctg}t+C,$$

где вместо t надо подставить $t=\operatorname{tg}x$.

5. $J=\int\frac{x}{\cos^4(2x^2+7)}dx.$

Сначала упрощаем аргумент, стоящий под знаком косинуса, полагая $t = 2x^2 + 7$. Тогда $dt = 4x\,dx$, $x\,dx = \frac{1}{4}\,dt$ и

$$J = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\cos^4 t}.$$

Четная степень косинуса выражается рационально через тангенс, поэтому можно ввести подстановку $z = \operatorname{tg} t$. Однако выкладки удобнее проделать так:

$$J = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\int (1 + \operatorname{tg}^2 t)\,d(\operatorname{tg} t) =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + z^2)\,dz = \frac{1}{4}z + \frac{1}{12}z^3 + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$J = \frac{1}{4}\operatorname{tg}(2x^2 + 7) + \frac{1}{12}\operatorname{tg}^3(2x^2 + 7) + C.$$

6. $J = \int \frac{dx}{\sin x}$.

Так как $\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}$, полагаем $\cos x = t$ и

$$J = -\int \frac{dt}{1 - t^2} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

V. Остановимся специально на интегралах вида

$$J = \int \sin^n x \cos^m x\,dx,$$

где n и m — натуральные. Если хоть одно из чисел m или n нечетное, то мы находимся в условиях случая II или III (соответственно). Если же оба показателя m и n — четные, то рационализация подынтегральной функции может быть достигнута с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x$ (случай IV). Однако при четном m и n более удобен другой прием — переход к двойному аргументу.

Пусть, например, $n = 2k$, $m = 2l$ и $n \geqslant m$, т. е. $k \geqslant l$. Преобразуем подынтегральную функцию так:

$$\sin^{2k} x \cos^{2l} x = (\sin x \cos x)^{2l} \sin^{2(k-l)} x =$$

$$= \frac{1}{2^{2l}} \sin^{2l} 2x \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^{k-l}.$$

При этом мы использовали формулы для синуса и косинуса двойного аргумента

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

(если $k \leqslant l$, то придется применить формулу $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$).

После раскрытия скобок получаются слагаемые, содержащие произведения вида $\sin^{n_1} 2x \cos^{m_1} 2x$.

В тех случаях, когда хоть одно из чисел m_1 или n_1 — нечетное, интеграл берется сразу с помощью подстановки $t = \sin 2x$ или $t = \cos 2x$ соответственно. В тех слагаемых, где m_1 и n_1 четные, снова описанным выше способом удваиваем аргумент, используя на этот раз формулы

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x,$$

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 2\cos^2 2x - 1.$$

Этим приемом мы сможем довольно быстро завершить вычисление интеграла J.

Рассмотрим несколько примеров.

7. $J = \int \sin^3 x \cos^5 x \, dx.$

Полагаем $\cos x = t$, тогда

$$J = \int (t^2 - 1)\, t^5 \, dt = \int (t^7 - t^5)\, dt = \frac{1}{8} t^8 - \frac{1}{6} t^6 + C =$$

$$= \frac{1}{8} \cos^8 x - \frac{1}{6} \cos^6 x + C.$$

Конечно, в данном примере применима также и подстановка $\sin x = t$. Однако при этой подстановке выкладки были бы немного сложнее, поскольку $\cos x$ входит в подынтегральное выражение в более высокой степени, чем $\sin x$. Именно мы имели бы

$$J = \int t^3 (1 - t^2)^2 \, dt.$$

8. $J = \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$

Преобразуем подынтегральную функцию

$$\sin^2 x \cos^4 x = (\sin^2 x \cos^2 x) \cos^2 x = \frac{1}{4} (\sin 2x)^2 \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

тогда

$$J = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \frac{1}{8} J_1 + \frac{1}{8} J_2.$$

J_2 вычисляем с помощью подстановки $\sin 2x = t$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int t^2 \, dt = \frac{1}{6} t^3 + C_1 = \frac{1}{6} \sin^3 2x + C_1.$$

При вычислении J_1 используем еще раз удвоение аргумента, т. е. применим формулу

$$\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}.$$

Тогда мы найдем, что

$$J_1 = \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + C_2.$$

Итак,

$$J = \frac{1}{16} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{3} \sin^3 2x \right) + C.$$

VI. Теперь рассмотрим интеграл

$$J = \int \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx,$$

где показатели α и β — любые рациональные числа. Представим подынтегральное выражение в виде

$$\sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx = \frac{1}{2} (\sin^2 x)^{\frac{\alpha-1}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{\beta-1}{2}} (2 \sin x \cos x \, dx)$$

и положим $\sin^2 x = z$. Получим

$$J = \frac{1}{2} \int z^{\frac{\alpha-1}{2}} (1-z)^{\frac{\beta-1}{2}} \, dz,$$

и задача сводится к интегрированию биномного дифференциала.

Приведем пример

9. $J = \int \sin^{\frac{3}{2}} x \cos^{\frac{1}{2}} x \, dx.$

Полагая $z = \sin^2 x$, получим

$$J = \frac{1}{2} \int z^{\frac{1}{4}} (1-z)^{-\frac{1}{4}} \, dz.$$

Мы находимся в условиях третьего случая интегрируемости биномного дифференциала (см. § 8, пункт II). Согласно указанному там приему представим J в виде

$$J = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1-z}{z} \right)^{-\frac{1}{4}} dz = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{z} - 1 \right)^{-\frac{1}{4}} dz$$

и затем положим $\frac{1}{z} - 1 = t^4$. Тогда $\frac{1}{z} = t^4 + 1$, $-\frac{dz}{z^2} = 4t^3 \, dt$, $z^2 = \frac{1}{(t^4+1)^2}$ и

$$J = -2 \int \frac{t^2}{(t^4+1)^2} \, dt.$$

Применим способ, изложенный в пункте II § 7, и положим $t = \frac{1}{y}$; тогда $J = 2 \int \frac{y^4}{(1+y^4)^2} \, dy$. Далее применим формулу интегрирования по частям, полагая $u=y$, $dv=\frac{y^3}{(1+y^4)^2}\,dy$; тогда $du=dy$, $v=-\frac{1}{4(1+y^4)}$ и

$$J=2\left[-\frac{y}{4(1+y^4)}+\frac{1}{4}\int\frac{dy}{1+y^4}\right]=-\frac{y}{2(1+y^4)}+\frac{1}{2}J_1.$$

Для вычисления J_1 представим числитель дроби $\frac{1}{y^4+1}$ в виде

$$1=\frac{1}{2}[(y^2+1)-(y^2-1)].$$

Тогда

$$J_1=\frac{1}{2}\int\frac{y^2+1}{y^4+1}\,dy-\frac{1}{2}\int\frac{y^2-1}{y^4+1}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(1+\frac{1}{y^2}\right)dy}{y^2+\frac{1}{y^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{\left(1-\frac{1}{y^2}\right)dy}{y^2+\frac{1}{y^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(y-\frac{1}{y}\right)}{\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(y+\frac{1}{y}\right)}{\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y-\frac{1}{y}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y+\frac{1}{y}-\sqrt{2}}{y+\frac{1}{y}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Окончательно получим

$$J=-\frac{y}{2(1+y^4)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y-\frac{1}{y}}{\sqrt{2}}-$$

$$-\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y+\frac{1}{y}-\sqrt{2}}{y+\frac{1}{y}+\sqrt{2}}\right|+C,$$

где $y=\frac{1}{t}$, $t=\sqrt[4]{\frac{1}{z}-1}$, $z=\sin^2 x$.

З а м е ч а н и е. Если подынтегральная функция $f(x)$ есть иррациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, но ее можно представить в виде

1) $f(x)=g(\sin x)\cos x$,

2) $f(x)=g(\cos x)\sin x$,

3) $f(x)=g(\operatorname{tg} x)$,

где g — иррациональная функция одного аргумента, то рекомендуется применить соответственно подстановки

$$1)\ \sin x = t, \quad 2)\ \cos x = t, \quad 3)\ \operatorname{tg} x = t.$$

В результате мы получим интеграл от иррациональной функции аргумента t, к которому может быть удастся применить уже известные нам методы рационализации подынтегрального выражения.

Пример 10. Вычислить

$$J = \int \frac{\cos x \sqrt{\sin x}}{4 \sin^2 x - 1} dx.$$

Полагаем $\sin x = t$. Тогда

$$J = \int \frac{\sqrt{t}}{4t^2 - 1} dt.$$

Рационализируем подынтегральное выражение с помощью подстановки $t = z^2$; тогда $2z\,dz = dt$ и

$$J = \int \frac{2z^2}{4z^4 - 1} dz = \frac{1}{2} \int \frac{z^2}{z^4 - \frac{1}{4}} dz.$$

Подынтегральную функцию представим в виде

$$\frac{z^2}{z^4 - \frac{1}{4}} = \frac{z^2}{\left(z^2 - \frac{1}{2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{z^2 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{z^2 + \frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$J = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{z^2 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int \frac{dz}{z^2 + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}\, z - 1}{\sqrt{2}\, z + 1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}\, z + C =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2 \sin x} - 1}{\sqrt{2 \sin x} + 1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2 \sin x} + C.$$

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

61. $\int \sin^5 (3x)\, dx$; **62.** $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$;

63. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$; **64.** $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$; **65.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 2} dx$;

66. $\int \frac{dx}{\sin^3(2x+3)}$; **67.** $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; **68.** $\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}\,dx$;

69. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$; **70.** $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$; **71.** $\int \sin^4 x \cos^6 x\,dx$;

72. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$; **73.** $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx$; **74.** $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x}\,dx$;

75. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$; **76.** $\int \frac{\sin^3 x\sqrt{\cos x}}{1-2\cos^2 x}\,dx$;

77. $\int \frac{dx}{\cos x\sqrt{3\cos^2 x + 4\cos x \sin x + \sin^2 x}}$.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x + C.$

2. $\frac{2}{5\sqrt{a}}x^{\frac{5}{2}} - 2x^2 + 4\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}} - 4ax + 2a\sqrt{a}\,x^{\frac{1}{2}} + C.$

3. $\frac{1}{1+\ln 3}3^x e^x + C.$

4. $2\,\mathrm{tg}\,x - x + C.$

5. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} - \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right) + C.$

6. $x + \frac{4}{5}\ln|5x+3| + C.$

7. $\frac{1}{2}\ln(3x^2+4x+3) + C.$

8. $\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,x\sqrt{\frac{2}{5}} + C.$

9. $-\frac{1}{2}e^{-x^2-1} + C.$

10. $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-1}\right| + C.$

11. $\frac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2) + \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{ax}{b} + C.$

12. $\sqrt{x^2-4} + 3\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C.$

13. $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{5}}\right) + C.$

14. $\frac{1}{80}(2x+3)^{10}-\frac{1}{12}(2x+3)^9+\frac{9}{64}(2x+3)^8+C.$

15. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C.$

16. $\ln|e^x-1|+C.$

17. $\ln|\cos x|+\frac{1}{2\cos^2 x}+C.$

18. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1}{\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1}\right|+C.$

19. $-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(9-x^2)^6}+C.$

20. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{8}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C.$

21. $\sqrt{x^2+3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3}}\right|+C.$

22. $\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}+C.$

23. $-\frac{4}{15}\sqrt[4]{(2-5x)^3}+C.$

24. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{ctg} x-\sqrt{2}}{\operatorname{ctg} x+\sqrt{2}}\right|+C.$

25. $-\frac{1}{4\sqrt[4]{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt[4]{3}}{x+\sqrt[4]{3}}\right|-\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt[4]{3}}+C.$

26. $\frac{1}{5}e^{5x}\left(x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{31}{25}x-\frac{31}{125}\right)+C.$

27. $\frac{1}{8}(2x^2\sin 2x^2+\cos 2x^2)+C.$

28. $\frac{1}{3}(x^3+1)\ln|1+x|-\frac{1}{9}(x+1)^3+\frac{1}{2}(x+1)^2-x+C.$

29. $\frac{1}{8}(1-2x^2)\cos 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x+C.$

30. $\frac{1}{4}(2x^2-1)\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C.$

31. $\frac{2}{13} x^2 [2 \sin (3 \ln 2x) - 3 \cos (3 \ln 2x)] + C.$

32. $\frac{e^{2x}}{29} \left[\left(2x + \frac{21}{29}\right) \sin 5x + \left(-5x + \frac{20}{29}\right) \cos 5x \right] + C.$

33. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$

34. $-\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$

35. $x \ln (x + \sqrt{16 + x^2}) - \sqrt{16 + x^2} + C.$

36. $\frac{11}{6} \ln |x - 1| + \frac{20}{3} \ln |x + 2| - \frac{11}{2} \ln |x + 3| + C.$

37. $\frac{7}{26} \ln |x - 3| - \frac{1}{5} \ln |x - 1| - \frac{9}{260} \ln (x^2 + 4x + 5) +$

$+ \frac{33}{130} \operatorname{arctg} (x + 2) + C.$

38. $\frac{2x - 1}{2(x^2 + 2x + 2)} + \operatorname{arctg} (x + 1) + C.$

39. $x + \frac{3 - x}{x^2 - 2x + 2} + 2 \ln (x^2 - 2x + 2) + \operatorname{arctg} (x - 1) + C.$

40. $\frac{1}{18} \ln |x + 1| + \frac{1}{12} \ln (x^2 + 1) - \frac{1}{9} \ln (x^2 - x + 1) +$

$+ \frac{x^3 - 1}{6(x^3 + 1)} \operatorname{arctg} x + C.$

41. $J_{n+1} = -\frac{x}{2a^2 n (x^2 - a^2)^n} - \frac{1}{2a^2} \frac{2n - 1}{n} J_n \; (n = 1, 2, \ldots).$

42. $\frac{x}{4(x^4 + 1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{3}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1} + C.$

43. $\frac{1}{2} \left(\frac{x - 2}{x - 1}\right)^2 - 4 \frac{x - 2}{x - 1} + 4 \frac{x - 1}{x - 2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x - 1}{x - 2}\right)^2 +$

$+ 6 \ln \left| \frac{x - 2}{x - 1} \right| + C.$

44. $-\frac{7}{2(x - 2)^2} + \frac{61}{625} \left(\frac{x + 3}{x - 2}\right)^2 - \frac{196}{625} \cdot \frac{x + 3}{x - 2} +$

$+ \frac{26}{625} \ln \left| \frac{x + 3}{x - 2} \right| - \frac{48}{625} \cdot \frac{x - 2}{x + 3} + C.$

45. $-\dfrac{x^5}{6(x^2-5)^3}-\dfrac{5x^3}{24(x^2-5)^2}-\dfrac{5x}{16(x^2-5)}+\dfrac{\sqrt{5}}{32}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+($

46. $\dfrac{6}{7}x^{7/6}-\dfrac{12}{5}x^{5/6}-3x^{2/3}+8x^{1/2}+12x^{1/3}-48x^{1/6}+$

$+48\operatorname{arctg}\dfrac{x^{1/6}}{\sqrt{2}}-24\ln(x^{1/3}+2)+C.$

47. $-\dfrac{5t}{t^3+1}+\dfrac{5}{3}\ln|t+1|-\dfrac{5}{6}\ln(t^2-t+1)+$

$+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}+C,$

где $t=\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{3-x}}$.

48. $-2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}+C.$

49. $\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{2x^2+1}}+C.$

50. $\dfrac{1}{3}x^{-3}(2x^2-1)\sqrt{x^2+1}+C.$

51. $-\dfrac{1}{8}x^{-1}(3x^3+4)(2+x^3)^{-\frac{2}{3}}+C.$

52. $\dfrac{1}{15}(2x^2+10x+15)x^{1/2}(x+2)^{-5/2}+C.$

53. $\dfrac{2(x+1)^5+10(x+1)^3+15x+12}{15(x^2+2x+3)^{5/2}}+C.$

54. $\dfrac{1}{6}(2x^2+x+7)\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}|+C.$

55. $\dfrac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+2}+\dfrac{7}{8}\ln\left|x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right|-$

$-\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{3x+5+4\sqrt{x^2+x+2}}{8(x-1)}\right|+C.$

56. $-\dfrac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x-1}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+4})-$

$-\dfrac{2}{\sqrt{7}}\ln\left|\dfrac{2x+5+\sqrt{7}\sqrt{x^2+2x+4}}{7(x-1)}\right|+C.$

57. $-\dfrac{3x^4+2x^3}{18}+\dfrac{1}{288}(48x^3+8x^2+14x-37)\sqrt{x^2+x+1}+$

$+\dfrac{3}{192}\ln\left(x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$

58. $\frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{3}\sqrt{x^2+2x+3}}{x+2}\right|-$

$-\frac{1}{3\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(x+2)\sqrt{6}+3\sqrt{x^2+2x+3}}{x-1}\right|+C.$

59. $\sqrt{x^2+2x+4}-\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+4})-$

$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{3}}{x+1}\right|-$

$-\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2x+5+\sqrt{7}\sqrt{x^2+2x+4}}{x-1}\right|+C.$

60. $\frac{1}{8\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\sqrt{4x^2-2x+4}-\sqrt{7}(1-x)}{2\sqrt{4x^2-2x+4}+\sqrt{7}(1-x)}\right|-$

$-\frac{1}{2\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}(1+x)}{\sqrt{2}\sqrt{4x^2-2x+4}}+C.$

61. $-\frac{1}{15}\cos^5 3x+\frac{2}{9}\cos^3 3x-\frac{1}{3}\cos 3x+C.$

62. $\frac{1}{2}\sin^2 x-\ln\sin^2 x-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.$

63. $\operatorname{tg} x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C.$

64. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+C.$

65. $\cos x-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{2}}+C.$

66. $-\frac{\cos(2x+3)}{4\sin^2(2x+3)}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\cos(2x+3)-1}{\cos(2x+3)+1}\right|+C.$

67. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$

68. $\frac{1}{13}(12x-5\ln|2\operatorname{tg} x+3|-5\ln|\cos x|)+C.$

69. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right)+C.$

70. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)+C.$

71. $\frac{1}{2^{11}}\sin 8x-\frac{1}{2^8}\sin 4x+\frac{1}{5\cdot 2^6}\sin^5 2x+\frac{3}{2^8}x+C.$

72. $4\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}+C.$

73. $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{ctg} x-1}{\sqrt{2\operatorname{ctg} x}}\right)-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{ctg} x-\sqrt{2\operatorname{ctg} x}+1}{\operatorname{ctg} x+\sqrt{2\operatorname{ctg} x}+1}\right|+C.$

74. $\frac{1}{6}\ln\frac{1-\sin 2x}{2+\sin 2x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

75. $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}+C.$

76. $-\frac{1}{3}\sqrt{\cos^3 x}+\frac{\sqrt[4]{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{\cos x}-1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{\cos x}+1}\right|+$

$+\frac{\sqrt[4]{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{2}\sqrt{\cos x}\right)+C.$

77. $\ln\left|\operatorname{tg}x+2+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg}x+3}\right|+C.$

ГЛАВА III

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определение и простейшие свойства определенного интеграла

С первообразной тесно связано другое основное понятие интегрального исчисления — определенный интеграл. Как будет видно из дальнейшего, определенный интеграл играет основную роль в приложениях интегрального исчисления. В этой части курса мы остановимся на определенном интеграле только для непрерывных функций. Лишь в конце главы мы вкратце наметим некоторые обобщения.

Определение. Пусть f — непрерывная функция, заданная по крайней мере на отрезке $[a, b]$, F — одна из ее первообразных. *Определенным интегралом* от функции f по отрезку $[a, b]$ называется приращение первообразной F на этом отрезке, т. е. разность $F(b) - F(a)$. Такой определенный интеграл обозначается символом $\int_a^b f\,dx$ или $\int_a^b f(x)\,dx$. При этом числа a и b называются *пределами интегрирования*, *нижним* и *верхним* соответственно. Таким образом,

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Последнюю формулу часто называют *формулой Ньютона—Лейбница*.

В дальнейшем вместо «определенный интеграл» мы чаще будем говорить просто «интеграл».

Так как все первообразные для одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянные слагаемые, величина интеграла не зависит от выбора первообразной F. Действительно, если Φ — другая первообразная функции f, то $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — постоянная. А тогда

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) + C - [F(a) + C] = F(b) - F(a).$$

Формулу (1) часто записывают так:

$$\int_a^b f\,dx = F(x)\Big|_a^b .$$

Вертикальная черта с указанием пределов интегрирования называется *знаком подстановки* и этот знак понимается как указание, что нужно сначала в $F(x)$ вместо x подставить b, затем a и образовать разность $F(b) - F(a)$. Например,

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

В определении интеграла по промежутку $[a, b]$ совсем необязательно считать, что $a < b$. Говоря дальше об отрезке $[a, b]$, будем допускать, что a может быть как левым, так и правым концом отрезка (т. е. возможно, что $a > b$), но при этом именно a считается началом данного отрезка. Указание, какая из двух крайних точек отрезка считается его началом, называется *ориентацией* отрезка. Каждый отрезок, естественно, допускает две ориентации, а от выбора ориентации будет зависеть и интеграл. В дальнейшем, определяя интеграл по формуле (1), мы считаем отрезок $[a, b]$ ориентированным и начало отрезка берем в качестве нижнего предела интегрирования.

Наконец, сделаем еще одно дополнение к определению интеграла. Именно условимся приписывать смысл интегралу с равными между собой пределами интегрирования, полагая

$$\int_a^a f\,dx = 0$$

(левую часть можно рассматривать как интеграл по одноточечному множеству, состоящему из точки a). Такое определение находится в полном соответствии с формулой Ньютона—Лейбница: если положить в этой формуле $b = a$, то как раз получится, что

$$\int_a^a f\,dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Итак, если функция f непрерывна на некотором промежутке, то для любой пары чисел a и b, принадлежащих этому промежутку, формулой (1) определен интеграл $\int_a^b f\,dx$.

Приведем важный пример: если функция f равна постоянной k $(f(x) \equiv k)$, то $\int_a^b f\,dx = k(b - a)$.

Действительно,

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b k\,dx = kx \Big|_a^b = k(b-a).$$

Переходим к установлению простейших свойств интеграла. При этом мы предполагаем, не оговаривая каждый раз, что все подынтегральные функции непрерывны в некотором промежутке, а пределы интегрирования содержатся в этом промежутке.

1°. $\int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx$ (при перестановке пределов интегрирования интеграл умножается на -1).

2°. $\int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx = \int_a^b f\,dx$ при любом расположении точек a, b и c (при условии, что они содержатся в промежутке, где f непрерывна). Это свойство называется *аддитивностью* интеграла.

3°. $\int_a^b kf\,dx = k\int_a^b f\,dx$, если k — постоянная.

4°. $\int_a^b (f \pm g)\,dx = \int_a^b f\,dx \pm \int_a^b g\,dx$.

Все эти свойства вытекают непосредственно из определения интеграла по формуле (1). Проверим, например, свойство 4°.

Пусть F и G — первообразные для f и g соответственно. Тогда $(F \pm G)' = f \pm g$. Следовательно,

$$\int_a^b (f \pm g)\,dx = [F(x) \pm G(x)] \Big|_a^b = [F(b) \pm G(b)] -$$

$$-[F(a) \pm G(a)] = [F(b) - F(a)] \pm [G(b) - G(a)] =$$

$$= \int_a^b f\,dx \pm \int_a^b g\,dx.$$

5°. Если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$ и $a < b$, то $\int_a^b f\,dx \geqslant 0$.

Действительно, если $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, то функция F возрастает (в широком смысле, т. е. не убывает) на отрезке $[a, b]$, и поэтому $F(b) \geqslant F(a)$.

6°. Если $f(x) \geqslant g(x)$ на отрезке $[a, b]$ и $a < b$, то $\int_a^b f\,dx \geqslant$ $\geqslant \int_a^b g\,dx$ (допустимо почленное интегрирование неравенства).

Для доказательства положим $h = f - g$. Тогда $h(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$. Используя свойства 4° и 5°, сразу получаем

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx + \int_a^b h\,dx \geqslant \int_a^b g\,dx.$$

7°. $\left|\int_a^b f\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\,dx\right|$ (в правой части знак абсолютной величины, относящийся ко всему интегралу, нужен в случае, если $a > b$).

Для доказательства записываем неравенство $-|f(x)| \leqslant \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. Считая сначала, что $a < b$, используем возможность почленного интегрирования неравенств и получаем

$$-\int_a^b |f|\,dx \leqslant \int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b |f|\,dx,$$

т. е. $\left|\int_a^b f\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dx$. Если же $a > b$, то имеем

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| = \left|\int_b^a f\,dx\right| \leqslant \int_b^a |f|\,dx = \left|\int_a^b |f|\,dx\right|.$$

8°. Если $|f(x)| \leqslant K$ на отрезке $[a, b]$, то $\left|\int_a^b b\,dx\right| \leqslant \leqslant K|b - a|$.

Для доказательства используем свойства 6° и 7°. Если $a < b$, то

$$\int_a^b |f|\,dx \leqslant \int_a^b K\,dx = K(b - a).$$

Следовательно,

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dx \leqslant K(b - a).$$

Если же $a > b$, то

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| = \left|\int_b^a f\,dx\right| \leqslant K(a - b) = K|b - a|.^{*}$$

9°. Если $f(x) \geqslant 0$ и $\int_a^b f\,dx = 0$ $(a \neq b)$, то $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$.

---

* Свойства 7° и 8°, очевидно, выполняются тривиальным образом и при $b = a$.

Не уменьшая общности, можно считать, что $a < b$. Допустим, что $f(c) \neq 0$ в некоторой точке $c \in [a, b]$, $f(c) > 0$. Тогда по непрерывности $f(x) > 0$ и в некоторой окрестности точки c. Следовательно, отрезок $[a, b]$ можно разбить на три части $[a, c-\delta]$, $[c-\delta, c+\delta]$ и $[c+\delta, b]$ $(\delta > 0)$ (см. рис. 1) так, что в средней из них $f(x) > 0$.* Но тогда и

$$m = \min_{c-\delta \leqslant x \leqslant c+\delta} f(x) > 0$$

и по 6°

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f\,dx \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} m\,dx = 2m\delta > 0.$$

Кроме того, $\int\limits_{a}^{c-\delta} f\,dx \geqslant 0$ и $\int\limits_{c+\delta}^{b} f\,dx \geqslant 0$ (так как $f(x) \geqslant 0$). Отсюда благодаря свойству аддитивности интеграла $\int\limits_{a}^{b} f\,dx > 0$, что противоречит условию. Тем самым свойство 9° доказано.

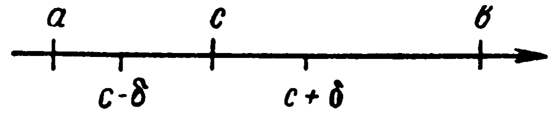

Рис. 1.

10°. Возьмем две точки из промежутка, в котором функция f непрерывна. Одну из них, обозначим ее a, будем считать фиксированной, а другую x — переменной. По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_{a}^{x} f\,dx = F(x) - F(a).$$

Но $F' = f$, а потому

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{x} f\,dx\right) = f(x).$$

Таким образом, *производная от интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу равна подынтегральной функции*. Аналогично можно убедиться, что *производная по нижнему пределу равна подынтегральной функции с обратным знаком*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x}^{b} f\,dx\right) = -f(x).$$

Приведем примеры на применение некоторых из доказанных свойств интеграла.

1. Оценить интеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x}\,dx$.

* Мы ведем рассуждение для случая, когда c — внутренняя точка отрезка $[a, b]$. Если же c совпадает с a или b, то рассуждение очевидным образом упрощается.

Здесь сразу ясно, что подынтегральная функция положительна и не превосходит $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Поэтому согласно 8°

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}\, dx \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} < 2.$$

Однако оценку снизу можно дать гораздо более точную, если учесть, что $\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x} \geqslant 1$. Из этого неравенства благодаря 6° сразу следует, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}\, dx \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} > 1{,}5.$$

2. Не вычисляя интегралы $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\, dx$ и $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$, установить, который из них больше.

Так как $\sin^{10} x \leqslant \sin^2 x$ при всех $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то $J_1 \leqslant J_2$ на основании предложения 6°. Однако если допустить, что $J_1 = J_2$, т. е.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^{10} x)\, dx = 0,$$

то по 9° отсюда следовало бы, что $\sin^2 x = \sin^{10} x$ на всем отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, что на самом деле неверно. Таким образом, $J_1 < J_2$.

Упражнения

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int_1^2 \frac{dx}{2+x}$; 2. $\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$; 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\, dx$. 4. $\int_0^1 \frac{x^2+5}{x^2-4}\, dx$.

Оценить следующие интегралы:

5. $\int_0^{25} \frac{e^{-2x}}{x+25}\, dx$; 6. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+3\sin x}$;

7. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\sqrt{\operatorname{tg} 2x}\, dx$.

§ 2. Теорема о среднем значении

Докажем следующую теорему, которую и называют **теоремой о среднем значении**.

Теорема 1. *Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$, причем $g(x) \geqslant 0$. Тогда существует по крайней мере одна такая точка $c \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b fg\,dx = f(c)\int_a^b g\,dx. \tag{2}$$

Доказательство. Проведем доказательство для случая, когда $a < b$. Если $g(x) \equiv 0$, то равенство (2) тривиально и притом в качестве c может быть взята любая точка из $[a, b]$. Будем далее считать, что функция g не есть тождественный нуль. Тогда по свойствам 5^0 и 9^0 (§ 1) $\int_a^b g\,dx > 0$.

Положим

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} f(x), \quad m = \min_{a \leqslant x \leqslant b} f(x).$$

Тогда $m \leqslant f(x) \leqslant M$ при всех $x \in [a, b]$. Умножая это неравенство почленно на $g(x)$ и учитывая, что $g(x) \geqslant 0$, получаем

$$mg(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant Mg(x).$$

Отсюда, в результате почленного интегрирования, находим

$$m\int_a^b g\,dx \leqslant \int_a^b fg\,dx \leqslant M\int_a^b g\,dx$$

или

$$m \leqslant \frac{\int_a^b fg\,dx}{\int_a^b g\,dx} \leqslant M.$$

Поскольку дробь, стоящая в среднем члене неравенства, заключена между двумя значениями непрерывной функции f, она по теореме Больцано—Коши тоже входит в совокупность значений этой функции, т. е. существует точка $c \in [a, b]$, в которой

$$f(c) = \frac{\int_a^b fg\,dx}{\int_a^b g\,dx}.$$

Это и есть иначе записанное равенство (2).

Важный частный случай теоремы о среднем значении получается из формулы (2), если $g(x) \equiv 1$. В этом случае равенство (2) принимает вид

$$\int_a^b f\,dx = f(c)(b-a), \tag{3}$$

т. е. *интеграл равен произведению некоторого значения подынтегральной функции на разность между пределами интегрирования.*

Заметим, что формула (3) никоим образом не может быть использована для вычисления интеграла. Ведь в теореме о среднем значении точка c не указывается, а лишь гарантируется ее существование. Наоборот, с помощью интеграла значение $f(c)$ может быть найдено из формулы (3)

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx.$$

Значение функции f, определяемое по этой формуле, называют ее *средним значением* на отрезке $[a, b]$.

Пример. Найти среднее значение функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[0, 1]$.

Искомое среднее значение равно

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

(здесь $b - a = 1$). Заодно нетрудно найти и ту точку c, в которой в нашем примере значение функции совпадает со средним значением, т. е. где $f(c) = \frac{1}{3}$. Так как $f(c) = c^2$, то $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Упражнения

Найти средние значения следующих функций в указанных промежутках:

8. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в промежутке $[8, 27]$;
9. $f(x) = \cos^2 2x$ в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

§ 3. Замена переменной и интегрирование по частям

Разобранные ранее в главе о вычислении неопределенных интегралов способы замены переменной и интегрирование по частям могут применяться и непосредственно к определенным интегралам. Покажем, как это делается.

Теорема 2. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, функция φ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, а все значения $\varphi(t)$ при*

$t \in [\alpha, \beta]$ *содержатся в отрезке* (a, b).* *Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть F — первообразная для функции f. Тогда $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ — первообразная для подынтегральной функции в правой части формулы (4). Следовательно,

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) =$$

$$= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример. Вычислить $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$.

Положим $x = a\sin t$. Если t пробегает отрезок $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то x пробегает отрезок $[0, a]$. Следовательно,

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt = \frac{a^2\pi}{4},$$

так как $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt = \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

Обращаем внимание читателя на то, что при замене переменной пределы интегрирования, как правило, изменяются.

Теорема 3. *Пусть функции u и v имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Тогда*

$$\int_a^b uv'\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dx. \qquad (5)$$

---

* Или хотя бы в том, может быть, более широком промежутке, где функция f непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы $(uv)' = uv' + u'v$ следует, что

$$\int_a^b uv'\,dx + \int_a^b uv'\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b,$$

а это и дает формулу (5).

П р и м е р. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$, где n — натуральное число.

Разбивая подынтегральную функцию на два сомножителя $\cos^{n-1} x$ и $\cos x$ и объединяя $\cos x$ с dx, полагаем

$$u = \cos^{n-1} x, \quad dv = \cos x\,dx.$$

Тогда

$$du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x\,dx, \quad v = \sin x$$

и по формуле (5)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx. \qquad (6)$$

Внеинтегральный член равен нулю. В этом и сказывается преимущество применения в данном примере способа интегрирования по частям непосредственно к определенному интегралу. Если бы мы сначала с помощью интегрирования по частям вычисляли неопределенный интеграл, а уже потом воспользовались формулой Ньютона—Лейбница, мы имели бы дело с более громоздкими выражениями.

Обозначим искомый интеграл через J_n. Подставляя в (6) $1 - \cos^2 x$ вместо $\sin^2 x$, мы придем к равенству

$$J_n = (n-1)(J_{n-2} - J_n)$$

или

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}.$$

Таким образом, мы получаем рекуррентную формулу. Эта формула позволяет свести вычисление J_n к вычислению J_0, если n четное и к J_1, если n — нечетное. Но

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

а тем самым легко вычислить J_n и при любом n. Например,

$$J_5 = \frac{4}{5} J_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} J_1 = \frac{8}{15}.$$

Нетрудно составить и общие формулы:

$$J_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ при } n \text{ четном},$$

$$J_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} \text{ при } n \text{ нечетном}.$$

Замена переменной и интегрирование по частям могут быть иногда использованы для получения некоторой информации об интеграле без непосредственного его вычисления. Приведем один пример такого типа.

Пример. Определить знак интеграла

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx. *$$

Имеем $J = J_1 + J_2$, где

$$J_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad J_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Так как $\frac{\sin x}{x} \geqslant 0$ на отрезке $[0, \pi]$ и $\frac{\sin x}{x} \leqslant 0$ на отрезке $[\pi, 2\pi]$, но эти функции не обращаются в 0 тождественно, $J_1 > 0$ и $J_2 < 0$. Остается выяснить, каково соотношение между J_1 и $|J_2|$. С этой целью произведем в интеграле по промежутку $[\pi, 2\pi]$ замену переменной по формуле $x = y + \pi$. Тогда y будет пробегать промежуток $[0, \pi]$, $dx = dy$, $\sin x = -\sin y$ и

$$|J_2| = \left| \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y + \pi} dy.$$

Обозначая переменную интегрирования снова буквой x, ** имеем

---

* Здесь подынтегральную функцию можно считать непрерывной на всем отрезке $[0, 2\pi]$, если принять, что при $x = 0$ ее значение равно 1.

** Ясно, что обозначение переменной интегрирования не играет никакой роли в определении интеграла. Ведь для любой функции

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = F(b) - F(a),$$

где F — первообразная для f.

$$|J_2| = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+\pi}\, dx.$$

Теперь из неравенства

$$\frac{\sin x}{x+\pi} < \frac{\sin x}{x},$$

которое справедливо при всех $x \in [0, \pi)$ (при $x = \pi$ оно переходит в равенство),* сразу следует, что $|J_2| < J_1$, а потому $J_1 + J_2 > 0$.

Упражнения

Вычислить интегралы:

10. $\int\limits_1^2 \frac{x^4}{x^{10}+1}\, dx$;

11. $\int\limits_0^{\ln 3} \sqrt{e^x - 1}\, dx$;

12. $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$;

13. $\int\limits_0^1 (1 - x^2)^n\, dx$;

14. $\int\limits_0^3 x^2 \sqrt{9 - x^2}\, dx$;

15. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^8 2x\, dx$.

16. Доказать, что если функция f — четная, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f\, dx = 2\int\limits_0^a f\, dx,$$

а если f нечетная, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f\, dx = 0 \ (a > 0).$$

Указание. Разбить промежуток интегрирования на две части $[-a, 0]$ и $[0, a]$ и в первой из них сделать замену переменной по формуле $x = -t$.

§ 4. Интегральные суммы

Интеграл тесно связан с некоторым процессом суммирования, к описанию которого мы сейчас и переходим.

Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на конечное число отрезков. Точки деления занумеруем в на-

* При $x = 0$ мы условились считать, что правая часть неравенства равна 1.

правлении от a к b. Например, если $a < b$ (этот случай мы и будем дальше рассматривать), то имеем

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Положим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n - 1$). Само разбиение обозначим буквой τ, а величину $r(\tau) = \max \Delta x_i$ назовем *рангом* разбиения τ.

Теперь на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_i ($x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$) и составим сумму

$$\sigma(\tau;\ \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(_i)\, \xi \Delta x_i.$$

Эта сумма называется *интегральной* или *суммой Римана**. Из самого определения видно, что интегральная сумма зависит как от разбиения τ, так и от выбора промежуточных точек ξ_i.

Теорема 4. *Если функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то ее интеграл* $\int\limits_a^b f\,dx$ *есть предел множества интегральных сумм*

$$\int\limits_a^b f\,dx = \lim_{r(\tau)\to 0} \sigma(\tau;\ \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}). \tag{7}$$

Однако чтобы эта формулировка имела смысл, нужно определить, что понимается под соотношением (7). Ведь предел в этой формуле не включается в известное нам понятие предела обычной функции. Будем понимать равенство (7) следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любом разбиении τ отрезка $[a, b]$, у которого $r(\tau) < \delta$, и при любом выборе промежуточных точек ξ_i

$$\left| \sigma(\tau;\ \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) - \int\limits_a^b f\,dx \right| < \varepsilon. \tag{8}$$

Доказательство теоремы. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, следовательно, для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|x' - x''| < \delta$, то

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{9}$$

Покажем, что это δ и есть требуемое в том смысле, что неравенство (8) выполняется, как только $r(\tau) < \delta$.

Итак, пусть τ — разбиение отрезка $[a, b]$, у которого ранг $r(\tau) < \delta$. По теореме о среднем значении на каждом из отрезков

---

* Б. Риман (1826—1866) — немецкий математик.

$[x_i, x_{i+1}]$ находим такую точку ξ_i^*, что

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\,dx = f(\xi_i^*)\,\Delta x_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Суммируя все эти равенства, получаем

$$\int_a^b f\,dx = \sigma^*,$$

где

$$\sigma^* = \sigma(\tau;\ \xi_0^*, \xi_1^*, \ \ldots, \xi_{n-1}^*) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i^*)\,\Delta x_i.$$

Теперь берем произвольные промежуточные точки $\xi_i\,(x_i \leqslant \xi_i \leqslant \leqslant x_{i+1})$. Тогда

$$\sigma(\tau;\ \xi_0, \xi_1, \ \ldots, \xi_{n-1}) - \int_a^b f\,dx = \sigma(\tau;\ \xi_0, \xi_1, \ \ldots, \xi_{n-1}) - \sigma^* =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i^*)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) - f(\xi_i^*)]\,\Delta x_i.$$

Так как $|\xi_i - \xi_i^*| \leqslant \Delta x_i \leqslant r(\tau) < \delta$, можно воспользоваться неравенством (9), и потому

$$\left| \sigma(\tau;\ \xi_0, \xi_1, \ \ldots, \xi_{n-1}) - \int_a^b f\,dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Эта теорема служит обоснованием простейшего метода приближенного вычисления интегралов. Теорема показывает, что если в качестве приближенного значения интеграла взять интегральную сумму, т. е. принять

$$\int_a^b f\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{10}$$

то полученная при этом погрешность может быть сделана сколь угодно малой. Нужно только использовать разбиение с достаточно малым рангом.

К приближенному вычислению интегралов мы вынуждены прибегать в первую очередь в тех случаях, когда первообразная не выражается в виде элементарных функций и, следовательно, формула Ньютона—Лейбница не позволяет вычислить интеграл точно. Впрочем, на практике приближенными способами вычисления интегралов пользуются часто и тогда, когда точное вычисление по формуле Ньютона—Лейбница хотя и возможно, но приводит к громоздким выкладкам.

Для того чтобы интегральная сумма приводила к более удобным приближенным формулам, используют разбиение промежутка интегрирования на равные части. При этом, если их число равно n, то все $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Если положить $\xi_i = x_i$ при всех $i = 0, 1, \ldots, \ldots, n-1$, то получается следующая приближенная формула

$$\int_a^b f\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),$$

которую называют *формулой левых ординат*. Если же принять $\xi_i = x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, то мы придем к *формуле правых ординат*

$$\int_a^b f\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Можно выбрать ξ_i и иначе, например, положить $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, т. е. выбрать в качестве ξ_i средние точки промежутков $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда мы получим *формулу средних ординат*.

Все формулы вида (10) называют *формулами прямоугольников* благодаря тому, что правую часть можно истолковать как площадь фигуры, составленной из прямоугольников с основаниями, равными $\frac{b-a}{n}$, и с высотами $f(\xi_i)$.

Пример. С помощью формулы средних прямоугольников при $n = 5$ вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Выкладки провести с тремя знаками после запятой.

Имеем $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = 0{,}4$; $x_3 = 0{,}6$; $x_4 = 0{,}8$; $x_5 = 1$; $\xi_0 = 0{,}1$; $\xi_1 = 0{,}3$; $\xi_2 = 0{,}5$; $\xi_3 = 0{,}7$; $\xi_4 = 0{,}9$; $\frac{b-a}{n} = 0{,}2$.

Подставляя значения ξ_i в выражение $f(x)$, находим

$$f(\xi_0) = 0{,}990;\quad f(\xi_1) = 0{,}917;\quad f(\xi_2) = 0{,}800;\quad f(\xi_3) = 0{,}671;$$
$$f(\xi_4) = 0{,}553.$$

Теперь, на основании формулы средних прямоугольников,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}2 \sum_{i=0}^{4} f(\xi_i) \approx 0{,}786.$$

В данном примере мы имеем возможность вычислить интеграл точно:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Полученный нами выше приближенный результат можно рассматривать как приближенное значение для $\frac{\pi}{4}$. Если использовать известные в математике выражения для π с большим числом десятичных знаков, то можно подсчитать, что $\frac{\pi}{4} = 0{,}785398\ldots$. Таким образом, погрешность найденного нами приближенного результата меньше $0{,}001$. Увеличивая n, мы смогли бы без особого труда получить приближенный результат с еще большей степенью точности.

§ 5. Аксиоматическое определение интеграла

Рассмотрим всевозможные непрерывные функции, каждая из которых задана на некотором промежутке (произвольного типа). Каждой паре, состоящей из какой-нибудь непрерывной функции f и отрезка $[a, b]$,* входящего в тот промежуток, на котором f задана, сопоставим вещественное число, обозначаемое $J_a^b(f)$. Иными словами, J — отображение множества указанных пар в множество вещественных чисел. Поставим вопрос: какими свойствами должно обладать отображение J, чтобы оно «совпадало с интегралом»? Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 5. *Для того чтобы*

$$J_a^b(f) = \int_a^b f\,dx$$

для любой непрерывной функции f и любого отрезка $[a, b]$, содержащегося в ее области задания, необходимо и достаточно, чтобы отображение J обладало следующими свойствами:

I. $J_a^c(f) + J_c^b(f) = J_a^b(f)$, *если* $a < c < b$;

II. *если* $f(x) \geqslant g(x)$ *на отрезке* $[a, b]$ (f и g — непрерывные функции), *то* $J_a^b(f) \geqslant J_a^b(g)$;

III. *если* $f(x) = k$ *на* $[a, b]$ (k — постоянная), *то* $J_a^b(f) = k(b-a)$.

Доказательство. Необходимость условий I—III вытекает из того, что этими свойствами обладает интеграл. Будем доказывать достаточность.

* Рассматриваемые в этом параграфе отрезки считаются ориентированными «слева направо», т. е. предполагается, что $a < b$.

Пусть функция f непрерывна по крайней мере на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков с помощью точек $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Положим

$$M_i = \max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x), \quad m_i = \min_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Из неравенства $m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i$ при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ и условий II—III сразу следует, что

$$m_i (x_{i+1} - x_i) \leqslant J_{x_i}^{x_{i+1}}(f) \leqslant M_i (x_{i+1} - x_i).$$

Суммируя почленно все эти неравенства и используя при этом условие I, получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \leqslant J_a^b(f) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

Аналогичное неравенство, с помощью тех же свойств I—III, получается и для интеграла:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \leqslant \int_a^b f\,dx \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

Совершенно так же, как и в предыдущем параграфе (при оценке разности $\sigma - \sigma^*$), можно показать, что если $\varepsilon > 0$ — произвольное, то

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i < \varepsilon$$

для любого разбиения с достаточно малым рангом. Таким образом, $J_b^a(f)$ и $\int_a^b f\,dx$ заключены между числами, разность между которыми может быть сколь угодно малой. А тогда $J_b^a(f) = \int_a^b f\,dx$.

Из доказанной теоремы следует, что мы могли бы определить интеграл как отображение, обладающее свойствами I—III. Однако если бы мы исходили из такого определения, мы должны были бы в первую очередь доказывать, что отображение, обладающее свойствами I—III, существует и единственно. При таком способе изложения, которого мы придерживаемся сейчас, мы просто показали, что интеграл, ранее определенный с помощью формулы Ньютона—Лейбница, как раз и приводит нас к тому единственному отображению, которое обладает свойствами I—III.

§ 6. Интеграл от кусочно-непрерывной функции

Как известно, функция f называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна во всех точках этого отрезка, за исключением конечного числа их, и притом все разрывы I рода.

Сейчас мы распространим определение интеграла на кусочно-непрерывные функции.

Будем далее для определенности считать, что $a < b$. Пусть f кусочно-непрерывна на $[a, b]$. Занумеруем слева направо все ее точки разрыва, присоединяя к ним также концы отрезка a и b:

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_p = b.$$

Тогда на каждом из отрезков $[c_{k-1}, c_k]$ функция f непрерывна во всех его внутренних точках. Кроме того, поскольку все разрывы I рода, существуют конечные пределы

$$f(c_{k-1}+0) = \lim_{x \to c_{k-1}+0} f(x), \quad f(c_k - 0) = \lim_{x \to c_k - 0} f(x).$$

Введем теперь функции

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } c_{k-1} < x < c_k, \\ f(c_{k-1}+0) & \text{при } x = c_{k-1}, \\ f(c_k - 0) & \text{при } x = c_k \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p).$$

Каждая функция φ_k определена и непрерывна на отрезке $[c_{k-1}, c_k]$ и потому интеграл $\int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} \varphi_k \, dx$ уже определен. Используя эти интегралы, определим теперь интеграл от функции f по отрезку $[a, b]$ формулой

$$\int\limits_a^b f\,dx = \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} \varphi_k \, dx. \tag{11}$$

Аналогично определяется интеграл от кусочно-непрерывной функции и в случае, когда $a > b$.

Заметим, что при этом определении значения функции f в самих точках разрыва не влияют на величину интеграла.

Опираясь на определение интеграла по формуле (11) и доказанные в § 1 свойства интеграла от непрерывной функции, легко проверить, что почти все эти свойства переносятся и на интеграл от кусочно-непрерывной функции. Исключение составляют только свойства 9^0 и 10^0. Именно 9^0 приобретает следующий вид: *если* $f(x) \geqslant 0$ *и* $\int\limits_a^b f dx = 0$ $(a \neq b)$, *то* $f(x) = 0$ *всюду, где* f *непрерывна*. В 10^0 записанные там формулы дифференцирования интеграла по переменному пределу остаются в силе во всех тех точках, где f непрерывна.

Теорема о среднем значении для кусочно-непрерывных функций будет выглядеть так: *если* $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$ (на отрезке $[a, b]$), *а* $g(x) \geqslant 0$, *то*

$$\int_a^b fg\,dx = \mu \int_a^b g\,dx,$$

где μ — *некоторое число, заключенное между* m *и* M.

На замене переменной и интегрировании по частям для интегралов от кусочно-непрерывных функций мы не останавливаемся.

§ 7. Несобственные интегралы

В этом параграфе интеграл будет определен для еще более широкого класса функций. Начнем со следующего определения.

Пусть функция f непрерывна на полузамкнутом промежутке $[a, b)$ (здесь a — конечное, $a < b \leqslant +\infty$), а F — ее первообразная. Интеграл от f определяется формулой

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{x\to b-0} F(x) - F(a), \tag{12}$$

если указанный предел, конечный или бесконечный (определенного знака), существует. Иными словами,

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{x\to b-0} \int_a^x f\,dx.$$

Интеграл, определяемый формулой (12), и называется *несобственным*. Если он имеет конечное значение, то говорят также, что он *сходится*; если же $\int_a^b f\,dx = \pm\infty$ или вообще не имеет смысла, то принято говорить, что несобственный интеграл от функции f *расходится*. Здесь используется та же терминология, что и в теории рядов. По поводу подынтегральной функции в рассматриваемом случае принято говорить, что она имеет особенность в точке b.

Заметим, что если b конечно, а функция f непрерывна на всем отрезке $[a, b]$, то несобственный интеграл от нее совпадает с «собственным», определяемым по формуле Ньютона—Лейбница. Действительно, в этом случае первообразная F определена и непрерывна на всем отрезке $[a, b]$, и потому

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{x\to b-0} F(x) - F(a) = F(b) - F(a).$$

К «собственному» интегралу несобственный сводится и тогда, когда f задана и непрерывна на $[a, b)$ и имеет конечный предел $f(b-0)$ $(b < +\infty)$. Ведь в этом случае функция f может быть доопределена в точке b с сохранением непрерывности. Таким образом, несобственный интеграл представляет существенно новое понятие, если b конечно, но функция f не имеет конечного предела в точке b, или если $b = +\infty$.

Почти все свойства интеграла, установленные в § 1, переносятся и на несобственные интегралы. Сформулируем некоторые из них.

а) *Если* $a < c < b$, *то*

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx,$$

где два крайних интеграла — несобственные, причем из сходимости одного из них вытекает сходимость другого.

Для доказательства достаточно, считая, что $c < x < b$, записать равенство

$$F(x) - F(a) = [F(c) - F(a)] + [F(x) - F(c)]$$

и перейти в нем к пределу при $x \to b-0$. При этом сходимость обоих несобственных интегралов $\int_a^b f\,dx$ и $\int_c^b f\,dx$ означает одно и то же: существование конечного $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$.

б) $\int_a^b (f \pm g)\,dx = \int_a^b f\,dx \pm \int_a^b g\,dx;$

при этом все три интеграла понимаются как несобственные и из сходимости двух из них вытекает сходимость третьего. Та же формула, в частности, справедлива и тогда, когда один из интегралов — «собственный».

в) $\int_a^b kf\,dx = k\int_a^b f\,dx$ (k — постоянная).

При этом из сходимости интеграла $\int_a^b f\,dx$ *вытекает сходимость интеграла* $\int_a^b kf\,dx$ (обратное заключение справедливо при $k \neq 0$).

Доказательства утверждений б) и в) очевидны и мы рекомендуем читателю провести их самостоятельно.

Совершенно аналогично можно определить несобственный интеграл и для функции f, имеющей особенность в точке a, т. е. непрерывной на промежутке $(a, b]$:

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - \lim_{x\to a+0} F(x)$$

(здесь $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, F — первообразная для f). Если же f непрерывна на интервале (a, b), за исключением, может быть, какого-то конечного числа его точек (эти точки вместе с концами интервала (a, b) мы считаем особенными для f), то мы разбиваем интервал (a, b) на конечное число промежутков так, что в каждом из них функция f имеет только одну особенность и именно на одном из его концов. Тогда $\int\limits_a^b f\,dx$ определяется как сумма несобственных интегралов от f по всем упомянутым промежуткам (если все эти интегралы сходятся). Например, если f непрерывна на всей оси, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f\,dx = [F(c) - \lim_{x\to-\infty} F(x)] + $$
$$+ [\lim_{x\to+\infty} F(x) - F(c)] = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

Ясно, что при таком определении интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\,dx$ не зависит от выбора точки c.

Примеры. 1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty}$* $=$

$$= \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

Здесь мы сразу указали в правой части подстановку $\Big|_0^1$, тогда как по определению мы должны были брать предел первообразной при $x \to 1$. Но благодаря непрерывности первообразной это одно и то же.

3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ $(p > 0)$. Здесь подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$.

Пусть сначала $p \neq 1$. Тогда первообразная для $\frac{1}{x^p}$ выражается через степенную функцию, а именно

$$F(x) = \frac{x^{1-p}}{1-p}.$$

---

* Подстановку $x = +\infty$ при записи $F(x)\Big|_a^{+\infty}$ нужно понимать как вычисление $\lim F(x)$ при $x \to +\infty$.

Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_0^1 = \frac{1}{1-p} - \lim_{x\to+0} \frac{x^{1-p}}{1-p}.$$

Но

$$\lim_{x\to+0} x^{1-p} = \begin{cases} 0, & \text{если } p<1, \\ +\infty, & \text{если } p>1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & \text{если } p<1 \text{ (интеграл сходится)}, \\ +\infty, & \text{если } p>1 \text{ (интеграл расходится)}. \end{cases}$$

Наконец, если $p = 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 = \ln 1 - \lim_{x\to+0} \ln x = +\infty.$$

Таким образом, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ $(p>0)$ *сходится только при* $p<1$, *а при* $p \geqslant 1$ *он расходится.*

4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(p>0)$. Так же как и в предыдущем примере, сначала рассматриваем случай, когда $p \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Отсюда видно, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{если } p>1, \\ +\infty, & \text{если } p<1. \end{cases}$$

Если $p = 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln x - \ln 1 = +\infty.$$

Таким образом, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(p>0)$ *сходится при* $p>1$ *и расходится при* $p \leqslant 1$.

Для несобственных интегралов можно установить ряд признаков сходимости совершенно аналогичных признакам сходимости рядов. Приведем некоторые из них. Все формулировки мы даем для интеграла $\int\limits_a^b f\,dx$, в котором подынтегральная функция имеет одну особенность в точке b. F — первообразная для f.

I. *Для сходимости несобственного интеграла* $\int\limits_a^b f\,dx$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{x'}^{x''} f\,dx \to 0 \quad \textit{при} \quad x',\ x'' \to b-0. \tag{13}$$

Действительно, сходимость интеграла $\int\limits_a^b f\,dx$ означает существование конечного $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$, а для этого по признаку Больцано—Коши необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{x',\ x''\to b-0} [F(x'') - F(x')] = 0.$$

Но это и есть иначе записанное условие (13).

II. *Если* $\int\limits_a^b |f|\,dx$ *сходится, то* $\int\limits_a^b f\,dx$ *тоже сходится.* В этом случае интеграл $\int\limits_a^b f\,dx$ называется *абсолютно сходящимся.*

Действительно, по предыдущему признаку

$$\int\limits_{x'}^{x''} |f|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad x',\ x'' \to b-0.$$

Но тогда (см. предложение 7° из § 1) и

$$\int\limits_{x'}^{x''} f\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad x',\ x'' \to b-0,$$

и мы можем еще раз сослаться на предыдущий признак.

III. *Если* $f(x) \geqslant 0$, *то для сходимости* $\int\limits_a^b f\,dx$ *необходимо и достаточно, чтобы интеграл* $\int\limits_a^x f\,dx$ *как функция от* x *был ограничен на всем промежутке* $[a,\ b)$.

В самом деле, если $f(x) \geqslant 0$, то F — возрастающая функция, а тогда ее ограниченность необходима и достаточна для существования конечного $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$.

IV (1-й признак сравнения). *Если* $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$* и $\int_a^b f\,dx$ *сходится, то* $\int_a^b g\,dx$ *тоже сходится.*

Этот признак вытекает из III, если учесть, что $0 \leqslant \int_a^x g\,dx \leqslant \int_a^x f\,dx$ при всех $x \in [a, b)$.

V (2-й признак сравнения). *Если* $f(x) \geqslant 0$, $g(x) > 0$ *и* $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, *причем* $0 < k < +\infty$, *то интегралы* $\int_a^b f\,dx$ *и* $\int_a^b g\,dx$ *или оба одновременно сходятся или оба одновременно расходятся. Если же* $k = 0$, *то из сходимости второго из указанных интегралов вытекает сходимость первого из них, а если* $k = +\infty$, *то из сходимости первого интеграла вытекает сходимость второго.*

Предоставляем читателю самому доказать этот признак по образцу доказательства аналогичного признака для рядов.

Приведем примеры на применение признаков сравнения.

5. Так как интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, а $0 < \frac{\cos x}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ при всех $x \in (0, 1]$, то из IV вытекает, что $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ тоже сходится.

6. Сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{2x^3 - 1}$ вытекает с помощью V из сходимости $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ и соотношения

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{2x^3 - 1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{2x^3 - 1} = \frac{1}{2}.$$

7. Исследовать интеграл

$$J = \int_0^{+\infty} (3x^4 - x^2)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Докажем сходимость интеграла J двумя способами.

* Функция g так же, как и f, имеет одну особенность в точке b.

1-й способ. Представим интеграл J в виде суммы двух интегралов

$$J = \int_0^a (3x^4 - x^2) e^{-x^2} dx + \int_a^{+\infty} (3x^4 - x^2) e^{-x^2} dx = J_1 + J_2,$$

где a — произвольное положительное число. Интеграл J_1 — собственный. Проверим сходимость интеграла J_2.

Известно, что при $x \to +\infty$ функция e^x обладает более высоким порядком роста, чем функция x^α, где α — любое положительное число, т. е.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad (\alpha > 0).$$

Таким образом, $e^x > x^\alpha$ для достаточно больших x $(\alpha > 0)$. Так как $e^{x^2} > e^x$, если $x > 1$, то тем более $e^{x^2} > x^\alpha$ при достаточно больших x, следовательно, если x достаточно велико, то

$$0 < \frac{3x^4 - x^2}{e^{x^2}} < \frac{3x^4 - x^2}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Будем считать α фиксированным и большим 5, а число a выберем так, что предыдущее неравенство выполнено при $x \geqslant a$. Рассмотрим интегралы

$$J_2 = \int_a^{+\infty} (3x^4 - x^2) e^{-x^2} dx \quad \text{и} \quad J_3 = \int_a^{+\infty} \frac{3x^4 - x^2}{x^\alpha} dx$$

и покажем, что J_3 сходится.

Действительно,

$$\frac{3x^4 - x^2}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{3x^4}{x^\alpha} = \frac{3}{x^{\alpha-4}}.$$

Но $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-4}}$ сходится, поскольку $\alpha - 4 > 1$ (см. пример 4), значит по 2-му признаку сравнения сходится и J_3. Тогда из 1-го признака сравнения вытекает сходимость интеграла J_2, а тем самым доказана сходимость интеграла J.

2-й способ. Рассмотрим $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$. Этот интеграл сходится (убедитесь в этом самостоятельно), и так как

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(3x^4 - x^2) e^{-x^2}}{e^{-\frac{1}{2}x^2}} = 0,$$

то из V вытекает и сходимость J.

8. Исследовать интеграл

$$J=\int\limits_2^{+\infty}\frac{\ln(x-2)}{x^5+x^2+1}\,dx.$$

Подынтегральная функция имеет две особенности: при $x=2$ и при $x=+\infty$. Разобьем промежуток интегрирования на два: $[2, a]$ и $[a, +\infty)$, где $a>2$. Тогда

$$J=\int\limits_2^{a}\frac{\ln(x-2)}{x^5+x^2+1}\,dx+\int\limits_a^{+\infty}\frac{\ln(x-2)}{x^5+x^2+1}\,dx=J_1+J_2,$$

и в каждом из интегралов J_1 и J_2 подынтегральная функция имеет одну особенность.

Рассмотрим интеграл J_1. Как известно,

$$\lim_{z\to+0} z^\alpha|\ln z|=0 \quad \text{при любом } \alpha>0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to2+0}(x-2)^\alpha|\ln(x-2)|=0,$$

откуда

$$\lim_{x\to2+0}\frac{\dfrac{|\ln(x-2)|}{x^5+x^2+1}}{\dfrac{1}{(x-2)^\alpha}}=0$$

(следует учесть, что $\lim\limits_{x\to2}(x^5+x^2+1)=37$ конечен и отличен от нуля). Но интеграл $\int\limits_2^a\frac{dx}{(x-2)^\alpha}$ сходится при $\alpha<1$ (см. аналогичный пример 3), а потому сходится и интеграл $\int\limits_2^a\frac{|\ln(x-2)|}{x^5+x^2+1}\,dx$, т. е. интеграл J_1 абсолютно сходится.

Обратимся теперь к интегралу J_2. Так как

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{\ln z}{z^\alpha}=0 \quad \text{при любом } \alpha>0,$$

то и

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{x^\alpha}=0.$$

Отсюда вытекает, что если взять $\alpha < 5$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\ln(x-2)}{x^5+x^2+1}}{\dfrac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^5+x^2+1}\ln(x-2) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{x^5+x^2+1}\cdot\frac{\ln(x-2)}{x^{5-\alpha}} = 0.$$

Следовательно, из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha > 1$ вытекает сходимость J_2. Таким образом, интеграл J сходится (и, конечно, абсолютно).

9. Выяснить, при каких значениях параметра p ($p > 0$) сходится интеграл

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-9/x^2} - e^{-16/x^2}\right)^p dx.$$

Подынтегральная функция имеет две особенности: при $x = 0$ и при $x = +\infty$. Найдем предел подынтегральной функции при $x \to 0$. Так как $9/x^2 \to +\infty$, $16/x^2 \to +\infty$ при $x \to 0$, то $e^{-9/x^2} \to 0$, $e^{-16/x^2} \to 0$ при $x \to 0$, и существует конечный предел подынтегральной функции при $x \to 0$. Таким образом, интеграл от данной функции по промежутку, прилегающему к точке $x = 0$, сводится к собственному и остается исследовать поведение подынтегральной функции только при $x \to +\infty$. Для этого рассмотрим

$$\int\limits_a^{+\infty} \left(e^{-9/x^2} - e^{-16/x^2}\right)^p dx \quad (a > 0).$$

Известно, что $e^z - 1 \sim z$ при $z \to 0$. Таким образом, при $x \to +\infty$

$$e^{-9/x^2} - 1 \sim -\frac{9}{x^2}, \quad e^{-16/x^2} - 1 \sim -\frac{16}{x^2}.$$

Теперь уже легко проверить, что

$$e^{-9/x^2} - e^{-16/x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7}{x^2}.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-9/x^2} - e^{-16/x^2}}{\dfrac{7}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{-9/x^2} - 1\right) - \left(e^{-16/x^2} - 1\right)}{\dfrac{7}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-9/x^2} - 1}{\dfrac{7}{x^2}} - \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-16/x^2} - 1}{\dfrac{7}{x^2}} = -\frac{9}{7} + \frac{16}{7} = 1.$$

Далее,

$$(e^{-9/x^2} - e^{-16/x^2})^p \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{7^p}{x^{2p}} \quad (p > 0).$$

Но интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{2p}}$ $(a > 0)$ сходится при $2p > 1$ и расходится при $2p \leqslant 1$ (см. пример 4), т. е. сходится при $p > \frac{1}{2}$ и расходится при $p \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда по 2-му признаку сравнения интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} (e^{-9/x^2} - e^{-16/x^2})^p \, dx$$

сходится при $p > \frac{1}{2}$ и расходится при $p \leqslant \frac{1}{2}$.

То же заключение справедливо и по отношению к интегралу J, поскольку его особенность на левом конце промежутка интегрирования устраняется.

Способы интегрирования по частям и замены переменной могут применяться и для вычисления несобственных интегралов.

Пусть функции u и v имеют непрерывные производные u' и v' на промежутке $[a, b)$. Возьмем сначала $x < b$ и применим формулу интегрирования по частям на промежутке $[a, x]$

$$\int\limits_a^x uv' \, dx = u(x) v(x) \Big|_a^x - \int\limits_a^x vu' \, dx$$

(внеинтегральный член в развернутом виде должен выглядеть так: $u(x) v(x) - u(a) v(a)$). А теперь переходим к пределу при $x \to b - 0$. Получим

$$\int\limits_a^b uv' \, dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int\limits_a^b vu' \, dx. \tag{14}$$

Здесь подстановка числа b означает, что нужно взять $\lim\limits_{x \to b-0} u(x) v(x)$. Формула (14) и есть формула интегрирования по частям. Она имеет смысл, если оба несобственных интеграла сходятся (в частности, если интеграл справа окажется «собственным», т. е. если vu' будет иметь конечный предел в точке b и существует конечный $\lim\limits_{x \to b-0} u(x) v(x)$). Иными словами, все три члена формулы (14) должны иметь конечные значения. Однако из свойств предела суммы следует, что если какие-нибудь два из трех членов формулы (14) имеют конечные значения, то третий тоже будет иметь конечное значение.

Пример. Проверить сходимость интеграла $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$ (здесь особенность — в точке $x = 0$).

Полагая $u = \ln \sin x$, $dv = dx$ и применяя формулу (14), находим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = x \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} \, dx.$$

Последний интеграл можно рассматривать как собственный, поскольку $\lim\limits_{x \to 0} x \frac{\cos x}{\sin x} = 1$. Для внеинтегрального члена с помощью правила Лопиталя находим

$$\lim_{x \to +0} x \ln \sin x = \lim_{x \to +0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +0} \frac{\cos x}{\sin x \frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2 \cos x}{\sin x} = 0.$$

Следовательно, интеграл слева тоже имеет конечное значение, т. е. сходится.

Покажем, как можно установить сходимость того же интеграла J и не прибегая к формуле интегрирования по частям. При любом $\alpha > 0$ имеем

$$\lim_{x \to +0} \frac{|\ln \sin x|}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to +0} \frac{x^\alpha}{\sin^\alpha x} (\sin^\alpha x |\ln \sin x|) =$$

$$= \lim_{x \to +0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^\alpha (\sin^\alpha x |\ln \sin x|) = 0$$

(здесь мы использовали формулу $\lim\limits_{z \to +0} z^\alpha \ln z = 0$.) Но интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$, а тогда, по второму признаку сравнения сходится и интеграл J.

Пусть теперь дан несобственный интеграл $\int\limits_a^b f \, dx$ с особенностью в точке b, и пусть на промежутке $[\alpha, \beta)$ задана строго возрастающая функция φ с непрерывной производной, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = b$. Беря сначала промежуток $[\alpha, t)$, где $t < \beta$, и полагая $x = \varphi(t)$, запишем равенство (см. формулу (4))

$$\int_a^x f(x) \, dx = \int_\alpha^t f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt.$$

Переход к пределу в этом равенстве при $t \to \beta - 0$ (что равносильно $x \to b - 0$) и приводит нас к формуле, не отличающейся по виду от формулы (4). При этом сходимость одного из интегралов влечет сходимость другого.

Пример. Вычислить $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx$ (сходимость этого интеграла уже проверена выше).

Подстановка $x = 2t$ $\left(0 < t \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ приводит нас к равенству

$$J = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln \sin t + \ln \cos t)\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t\, dt + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t\, dt.$$

В последнем интеграле (он — «собственный») производим замену переменной $t = \frac{\pi}{2} - u$. Тогда u пробегает отрезок $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$, $dt = -du$, и

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t\, dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u\, du.$$

Подставляя в предыдущее равенство и складывая оба интеграла,* находим

$$J = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2J,$$

откуда $J = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

Упражнения

Исследовать сходимость интегралов:

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{5x^4 - x^2 + 1}\, dx$; **18.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 5x - \cos 7x}{x^2}\, dx$;

---

* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t\, dt + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u\, du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\, dt = J$. Различие в обозначениях переменной интегрирования никак не сказывается; важно, что подынтегральная функция имеет одно и то же аналитическое выражение.

19. $\int\limits_0^{+\infty} (2x^3 - 3x + 1) e^{-5x^2} dx$;   20. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{x^3 + 1} dx$;

21. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin 2x)}{\sqrt[5]{x}} dx$.

При каких значениях параметров p и q сходятся следующие интегралы:

22. $\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$;   23. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^p} dx$.

24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p \operatorname{arctg} x}{2 + 3x^q} dx \quad (q \geqslant 0)$;   25. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^p x \, dx$.

§ 8. Интегральный признак сходимости положительных рядов

Приведем теперь признак сходимости рядов, основанный на сравнении рядов с несобственными интегралами.

Введем прежде всего следующее понятие. Функция f, определенная на промежутке $[1, +\infty)$, называется *производящей функцией* ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{15}$$

если ее значения в целых точках совпадают с соответствующими членами ряда, т. е. $f(n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Если функция f непрерывна, то можно рассматривать несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} f \, dx. \tag{16}$$

В общем случае сходимость этого интеграла не связана со сходимостью ряда. Однако для положительных рядов имеет место следующий результат.

Теорема 6. *Пусть положительный ряд* (15) *имеет положительную, непрерывную и убывающую производящую функцию* f.* *Тогда ряд* (15) *и интеграл* (16) *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Пусть n — произвольное натуральное число. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству

* Заметим, что положительность функции f вытекает из положительности ряда и того, что функция f — убывающая.

$n \leqslant x \leqslant n+1$, в силу монотонности f будет

$$a_{n+1} = f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n) = a_n.$$

Интегрируя полученное неравенство по промежутку $[n, n+1]$, получим

$$a_{n+1} \leqslant \int\limits_n^{n+1} f\,dx \leqslant a_n.$$

Положим $b_n = \int\limits_n^{n+1} f\,dx$ и рассмотрим положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{17}$$

Вычисляя его частичную сумму, получаем

$$\sum_{n=1}^{m} b_n = \sum_{n=1}^{m} \int\limits_n^{n+1} f\,dx = \int\limits_1^{m+1} f\,dx.$$

Так как функция f положительна, то несобственный интеграл (16) существует. При этом

$$\int\limits_1^{+\infty} f\,dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_1^{m+1} f\,dx = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Таким образом, интеграл (16) и ряд (17) сходятся лишь одновременно.

Остается показать, что ряды (15) и (17) сходятся или расходятся одновременно. Используем полученное выше неравенство $a_{n+1} \leqslant b_n \leqslant a_n$. Если ряд (15) сходится, то по первой теореме сравнения рядов сходится и ряд (17). Если же ряд (15) расходится, то расходится и его остаток после первого члена, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$, а тогда снова по первой теореме сравнения расходится и ряд (17).

Теорема полностью доказана.

Приведем несколько примеров на исследование сходимости рядов с помощью интегрального признака.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}\ (\alpha > 0)$.

Чтобы составить производящую функцию, достаточно заменить n в выражении общего члена ряда на x. Получим $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Ясно, что на промежутке $[1, +\infty)$ эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы 6. Рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$. Известно, что этот интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Тогда те же выводы справедливы и для данного ряда. Тем самым мы доказали утверждение, сформулированное в § 3 гл. I.

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Ясно, что производящая функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ удовлетворяет условиям теоремы 6 на промежутке $[2, +\infty)$. Исследуем интеграл

$$J = \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

Произведем замену переменной $\ln x = t$; тогда $\frac{dx}{x} = dt$ и

$$J = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \lim_{t \to +\infty} (\ln t - \ln \ln 2) = +\infty,$$

т. е. интеграл расходится. Следовательно, данный ряд тоже расходится.

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$ $(p > 0,\ q > 0)$.

Здесь производящая функция $f(x) = \frac{1}{x^p \ln^q x}$ и условия теоремы 6 выполнены на промежутке $[2, +\infty)$. Рассмотрим интеграл

$$J = \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$$

и применим к нему подстановку $\ln x = t$. Тогда $\frac{dx}{x} = dt$, $x = e^t$ и

$$J = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{e^{-(p-1)t}}{t^q} dt. \tag{18}$$

Если $p = 1$, то этот интеграл принимает более простой вид

$$J = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^q},$$

и известно, что он сходится при $q > 1$ и расходится при $q \leq 1$.

Если $p > 1$, то интеграл (18) сходится при любом $q > 0$. Действительно,

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{e^{-(p-1)t}}{t^q} : \frac{1}{t^2} \right) = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-(p-1)t}}{t^{q-2}} = 0.$$

Следовательно, $\frac{e^{-(p-1)t}}{t^q} < \frac{1}{t^2}$ при всех достаточно больших t $(t \geqslant T)$, а известно, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ сходится.

Наконец, если $p < 1$, то интеграл (18) расходится при любом $q > 0$. Действительно,

$$\frac{e^{-(p-1)t}}{t^q} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Следовательно, подынтегральная функция превосходит при достаточно большом t любую положительную постоянную, а интеграл по бесконечному промежутку от положительной постоянной расходится.

Итак, данный ряд

сходится, если $p > 1$, а $q > 0$ — любое, или если $p = 1$, $q > 1$,

и расходится, если $p = 1$, $0 < q \leqslant 1$, или если $p < 1$, а $q > 0$ — любое.

Упражнения

Выяснить, при каких значениях параметра p сходятся следующие ряды:

26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^2}$ $(p > 0)$; **27.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p \ln \ln n}$ $(p > 0)$.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. $\ln \frac{4}{3}$. **2.** $\frac{2}{3}(5\sqrt{2} - 4)$. **3.** $1 - \frac{\pi}{4}$. **4.** $1 - \frac{9}{4} \ln 3$.

5. $0 < J < 0{,}02\,(1 - e^{-50})$. **6.** $\frac{2}{7}\pi < J < 2\pi$. **7.** $0 < J < \frac{\pi^2}{128}$. **8.** $\frac{195}{76}$.

9. $\frac{1}{2}$. **10.** $\frac{1}{5}\left(\operatorname{arctg} 32 - \frac{\pi}{4}\right)$. **11.** $2(\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{2})$. **12.** $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

13. $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. **14.** $\frac{81}{16}\pi$. **15.** $\frac{35}{512}\pi$. **17.** Сходится. **18.** Сходится. **19.** Сходится. **20.** Сходится. **21.** Сходится. **22.** Сходится при $p > 0$, $q > 0$. **23.** Сходится при $p < 3$. **24.** Сходится при $p > -2$, $q > p + 1$. **25.** Сходится при $|p| < 1$. **26.** Сходится при всех $p > 0$. **27.** Сходится при $p > 1$.

ГЛАВА IV

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. Аддитивные функции отрезка

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл от нее имеет смысл не только по всему отрезку $[a, b]$, но и по любому отрезку $\Delta = [a', b']$, содержащемуся в $[a, b]$. Таким образом, $\int\limits_{a'}^{b'} f\,dx$ можно рассматривать как функцию отрезка, т. е. это есть отображение множества всех отрезков $\Delta \subset [a, b]$ в множество вещественных чисел. В § 1 гл. III отмечено, что эта функция обладает свойством аддитивности (свойство 2°).

Перейдем к рассмотрению произвольных функций отрезка. Пусть $J = [a, b]$ — некоторый заданный отрезок, а Φ — какое-то отображение множества всех отрезков $\Delta \subset J$ в множество вещественных чисел. Все отрезки считаются в этой главе положительно ориентированными, т. е. началом отрезка всегда служит его левый конец. В частности, для основного отрезка J имеем $a < b$. Отображение Φ мы и называем *функцией отрезка*. Для краткости будем говорить, что функция Φ задана на отрезке J. Функция Φ называется *аддитивной*, если для любого отрезка $\Delta \subset J$ и любого его разбиения на два неналегающих отрезка Δ_1 и Δ_2 * выполнено равенство

$$\Phi(\Delta) = \Phi(\Delta_1) + \Phi(\Delta_2).$$

Из определения аддитивности вытекает, что и для разбиения отрезка Δ на любое конечное число неналегающих отрезков Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\Phi(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(\Delta_i).$$

---

* Иными словами, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, а отрезки Δ_1 и Δ_2 имеют только одну общую точку — общий конец.

Определение. Число ρ называется *плотностью* аддитивной функции Φ в точке $x_0 \in [a, b]$, если

$$\rho = \lim_{\substack{|\Delta| \to 0 \\ x_0 \in \Delta}} \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|},$$

где $|\Delta|$ означает длину отрезка Δ, а предел берется при условии, что $|\Delta| \to 0$, но при этом учитываются только те отрезки Δ, которые содержат точку x_0.*

Введем вспомогательную функцию точки, заданную для всех $x \in [a, b]$:

$$F(x) = \begin{cases} \Phi([a, x]), & \text{если } a < x \leqslant b, \\ 0, & \text{если } x = a. \end{cases}$$

Лемма 1. *Если ρ — плотность аддитивной функции Φ в точке x_0, то* существует $F'(x_0) = \rho$.

Доказательство. Считая, что $x_0 \neq a, b$, докажем, что правая производная $F'_+(x_0) = \rho$. Аналогичным образом доказывается, что $F'_-(x_0) = \rho$. Если же x_0 равно a или b, то рассуждение очевидным образом упрощается.

Пусть $\Delta x > 0$, $x = x_0 + \Delta x \leqslant b$. Из аддитивности функции Φ следует, что

$$\Phi([a, x_0]) + \Phi([x_0, x]) = \Phi([a, x]).$$

Следовательно,

$$\Phi([x_0, x]) = F(x) - F(x_0) = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0).$$

А тогда

$$F'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{\Phi([x_0, x])}{x - x_0} = \rho.$$

Заметим, что лемма 1 допускает обращение: если существует $F'(x_0) = \rho$, то ρ — плотность аддитивной функции Φ в точке x_0.

Если плотность функции Φ существует в каждой точке $x \in [a, b]$, то плотность сама является функцией точки. Обозначим ее $f(x)$. Нас будет интересовать только тот случай, когда эта функция непрерывна.

Лемма 2. *Если для аддитивной функции Φ на всем отрезке J существует непрерывная плотность f, то*

$$\Phi(J) = \int_a^b f\, dx.$$

---

* Точный смысл написанного равенства: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, то $\left| \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} - \rho \right| < \varepsilon$ как только $|\Delta| < \delta$ и $x_0 \in \Delta$.

Доказательство. Построенная выше вспомогательная функция F по лемме 1 — первообразная для f. А потому

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a) = \Phi([a, b]) = \Phi(J).$$

Таким образом, для представления аддитивной функции отрезка с помощью интеграла полезно знать ее плотность. Остается выяснить, как установить, что некоторая непрерывная функция точки является плотностью для заданной аддитивной функции отрезка. Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть Φ — аддитивная функция отрезка, заданная на отрезке $J = [a, b]$, f — непрерывная функция точки, заданная на том же отрезке J, и пусть каждому отрезку $\Delta \subset J$ сопоставлены два числа M_Δ и m_Δ так, что выполнены следующие условия:*

1) $m_\Delta |\Delta| \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant M_\Delta |\Delta|$ *для любого* $\Delta \subset J$;

2) $m_\Delta \leqslant f(x) \leqslant M_\Delta$ *для любого* $\Delta \subset J$ *и для всех* $x \in \Delta$;

3) $M_\Delta - m_\Delta \to 0$ *при* $|\Delta| \to 0$.

Тогда f — плотность функции Φ, а

$$\Phi(J) = \int_a^b f\,dx.$$

Доказательство. Берем любую точку $x_0 \in J$. Пусть Δ — произвольный отрезок такой, что $x_0 \in \Delta \subset J$. Тогда из первых двух условий теоремы сразу следует, что

$$\left|\frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} - f(x_0)\right| \leqslant M_\Delta - m_\Delta,$$

а по третьему условию $\dfrac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} \to f(x_0)$ при $|\Delta| \to 0$. Тем самым доказано, что $f(x_0)$ — плотность функции Φ в точке x_0. Остается сослаться на лемму 2.

Замечание. Если в условиях теоремы положить

$$M_\Delta = \max_{x \in \Delta} f(x), \quad m_\Delta = \min_{x \in \Delta} f(x), \tag{1}$$

то для применимости теоремы достаточно проверить выполнение условия 1), поскольку условия 2) и 3) выполняются автоматически.

Действительно, условие 2) вытекает из определения M_Δ и m_Δ тривиальным образом, а условие 3) есть следствие из равномерной непрерывности функции f.

Хотя при указанном сейчас способе выбора M_Δ и m_Δ теорема принимает наиболее простой вид, все же для некоторых приложений приходится брать в качестве M_Δ и m_Δ не точные границы функции f на Δ и, таким образом, использовать теорему в ее общей форме.

§ 2. Площадь криволинейной трапеции

В элементарной геометрии устанавливается, как для некоторых простейших плоских фигур определять и вычислять их площадь. Однако методы элементарной геометрии не применимы для более сложных фигур. В то же время математический анализ позволяет для весьма широкого класса множеств ввести понятие меры, которое является естественным обобщением площади и в простейших случаях совпадает с площадью. Позднее в курсе математического анализа будет разобрана конструкция, приводящая к определению меры, и выяснено, насколько широк класс множеств, для которых мера может быть определена. Сейчас же мы ограничимся аксиоматическим описанием меры, не проверяя, что такая мера действительно существует.

Итак, будем предполагать, что на плоскости выделен класс множеств, называемых *измеримыми*, и на этом классе задана функция μ, называемая *мерой*, обладающая следующими свойствами:

I) $0 \leqslant \mu E \leqslant +\infty$ для любого измеримого множества E;

II) любой прямоугольник измерим и его мера равна его площади; *

III) любое множество, расположенное на одной прямой, измеримо и его мера равна нулю;

IV) если $E = E_1 \cup E_2$, причем $E_1 \cap E_2 = \Lambda$ (пересечение E_1 и E_2 пусто)**, и если какие-нибудь два из этих множеств измеримы, то третье тоже измеримо и при этом $\mu E = \mu E_1 + \mu E_2$ (а д д и т и в н о с т ь меры);

V) если для некоторого множества E при любом $\varepsilon > 0$ существуют такие измеримые множества E_1 и E_2, что $E_1 \subset E \subset E_2$ и что $\mu (E_2 \setminus E_1) < \varepsilon$, то E измеримо.

Заметим, что из аддитивности меры вытекает ее м о н о т о н н о с т ь: если E и F измеримы и $E \subset F$, то $\mu E \leqslant \mu F$. Действительно, согласно аксиомам IV и I, $\mu F = \mu E + \mu (F \setminus E) \geqslant \mu E$. Из аксиомы IV также следует, что для любого конечного числа попарно непересекающихся измеримых множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu E_i.$$

Пусть теперь f — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, причем $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b]$. Назовем *подграфиком* функции f множество

$$P = \{(x, y);\quad a \leqslant x \leqslant b;\quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

* Прямоугольник может быть замкнутым, т. е. включать в себя все граничные точки, открытым, т. е. состоять из одних внутренних точек, или включать в себя часть своих граничных точек.

** Λ — обозначение пустого множества.

т. е. совокупность всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

(см. рис. 2). Заметим, что подграфик имеет смысл для любой неотрицательной функции, заданной на произвольном множестве. Подграфик функции, непрерывной на отрезке, называют также *криволинейной трапецией.*

Теорема 2. *Криволинейная трапеция P измерима и*

$$\mu P = \int_a^b f\,dx. \qquad (2)$$

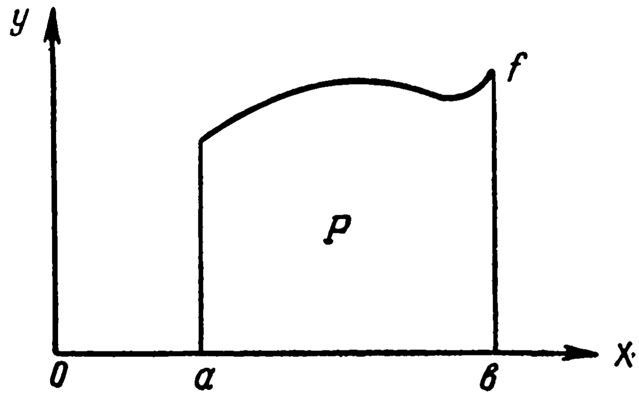

Рис. 2.

Меру криволинейной трапеции называют также ее *площадью.*

Доказательство. Сначала докажем измеримость криволинейной трапеции P.

Возьмем произвольное разбиение τ отрезка $[a, b]$ на конечное число отрезков с помощью точек $a=x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ Положим,

$$M_i = \max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x), \quad m_i = \min_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x).$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

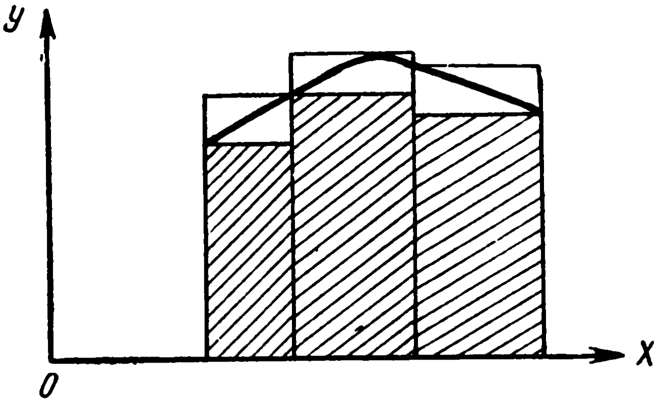

Рис. 3.

Далее, обозначим через Q_i и R_i прямоугольники, основанием которых служит отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, а высота равна M_i и m_i (соответственно); наконец, положим, $Q = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} Q_i$, $R = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} R_i$. Таким образом, Q и R — ступенчатые фигуры, составленные из прямоугольников (рис. 3; на этом рисунке заштрихована фигура R).

Множества Q и R измеримы. Действительно, каждый прямоугольник Q_i измерим по аксиоме II.

Отрезки, составляющие общие части границ двух соседних прямоугольников, следует относить только к одному из них. Тогда множество Q представляется как сумма прямоугольников без общих точек и измеримость Q вытекает из аксиомы IV. При этом

$$\mu Q = \sum_{i=0}^{n-1} \mu Q_i = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \,\Delta x_i.$$

Аналогично, R измеримо и $\mu R = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \,\Delta x_i$. Ясно, что $R \subset P \subset Q$.

Кроме того,

$$\mu(Q-R)=\mu Q-\mu R=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\Delta x_i,$$

а последнее выражение, за счет ранга разбиения τ и равномерной непрерывности функции f, может быть сделано сколь угодно малым. Благодаря этому измеримость P вытекает из аксиомы V.

Переходим к доказательству формулы (2). Пусть Δ — произвольный отрезок, содержащийся в $[a, b]$, а P_Δ — подграфик сужения функции f на отрезке Δ. Положим $\Phi(\Delta)=\mu P_\Delta$. Тем самым мы определяем некоторую функцию отрезка. Эта функция Φ аддитивна, что почти сразу вытекает из аддитивности меры. Действительно, если отрезок Δ разбит на два отрезка Δ_1 и Δ_2, то подграфики P_{Δ_1} и P_{Δ_2} имеют общую часть границы— прямолинейный отрезок (см. рис. 4). Но по аксиоме III этот отрезок имеет меру нуль. Поэтому, если из одного из подграфиков, например, из P_{Δ_2}, этот отрезок удалить, то вместо P_{Δ_2} получится множество P'_{Δ_2}, тоже измеримое и с той же самой мерой: $\mu P'_{\Delta_2}=\mu P_{\Delta_2}$.

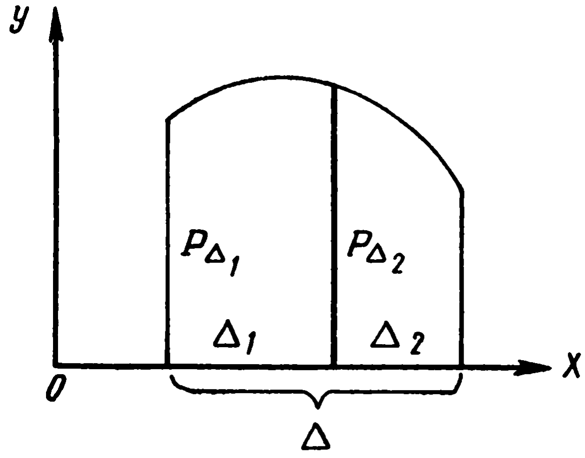

Рис. 4.

А теперь из аддитивности меры следует, что

$$\Phi(\Delta)=\mu P_\Delta=\mu P_{\Delta_1}+\mu P'_{\Delta_2}=\mu P_{\Delta_1}+\mu P_{\Delta_2}=\Phi(\Delta_1)+\Phi(\Delta_2).$$

Для любого $\Delta\subset[a, b]$

$$m_\Delta|\Delta|\leqslant\Phi(\Delta)\leqslant M_\Delta|\Delta|,$$

где M_Δ и m_Δ определены по формуле (1). А тогда по теореме 1 (из предыдущего параграфа), учитывая также замечание к ней, имеем

$$\mu P=\Phi([a, b])=\int_a^b f\,dx.$$

Из проведенного доказательства, в частности, видно, что

$$\mu Q\to\mu P \quad \text{и} \quad \mu R\to\mu P,$$

когда ранг $r(\tau)\to 0$. Если не исходить из общего понятия меры, то можно было бы дать непосредственное определение площади криволинейной трапеции P, как общего предела площадей ступенчатых фигур Q и R. Такое определение было бы весьма наглядным с геометрической точки зрения, но имело бы весьма частный характер, поскольку оно относилось бы только к криволинейным трапециям. Общая концепция меры, наоборот, позволяет избежать таких частных определений.

П р и м е р. Вычислить площадь фигуры, заключенной между параболой $y = h - ax^2$ ($h > 0$, $a > 0$) и осью OX (рис. 5; такая фигура называется *параболическим сегментом*).

Находим абсциссы точек пересечения данной параболы с осью OX: $h - ax^2 = 0$, откуда $x = \pm\sqrt{\frac{h}{a}}$. А теперь

$$\mu P = \int\limits_{-\sqrt{\frac{h}{a}}}^{\sqrt{\frac{h}{a}}} (h - ax^2)\,dx = \left(hx - \frac{ax^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{\frac{h}{a}}}^{\sqrt{\frac{h}{a}}} =$$

$$= 2\left(\frac{h^{3/2}}{a^{1/2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{h^{3/2}}{a^{1/2}}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{h\sqrt{h}}{\sqrt{a}}.$$

Из найденного выражения, в частности, видно, что площадь данного сегмента равна $\frac{2}{3} KL \cdot OM$.

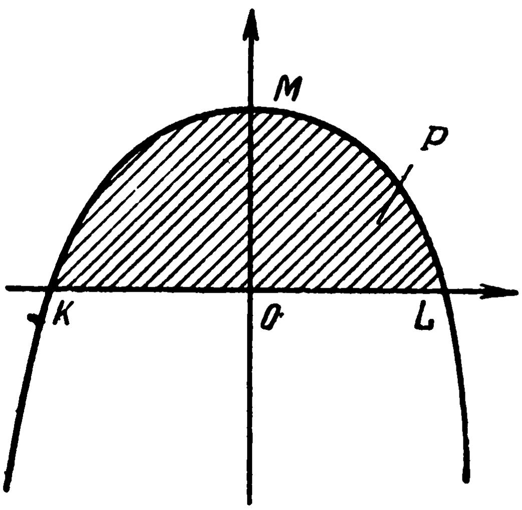

Рис. 5.

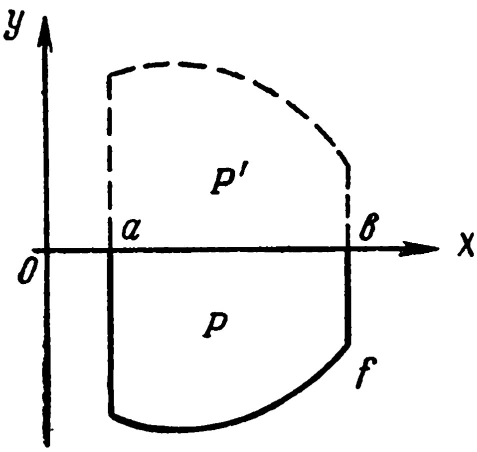

Рис. 6.

З а м е ч а н и е. Пусть функция $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, а P — множество, изображенное на рис. 6. В этом случае $\int\limits_a^b f\,dx < 0$ * и, следовательно, этот интеграл никак не может выражать μP. Однако из соображений симметрии легко следует, что

$$\mu P = \mu P' = \int\limits_a^b |f|\,dx.$$

К этому же результату можно прийти и не ссылаясь на симметрию, а проведя заново рассуждения, аналогичные доказательству предыдущей теоремы.

---

* Мы считаем, что $f(x) \not\equiv 0$.

Наконец, если функция f меняет знак на отрезке $[a, b]$, то заштрихованная на рис. 7 фигура имеет площадь, тоже равную $\int\limits_a^b |f|\, dx$.

Часто встречается случай, когда кривая, ограничивающая трапецию P сверху, задается в параметрической форме:

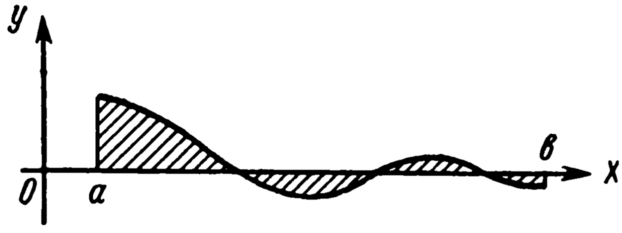

Рис. 7.

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

(φ и ψ — непрерывны). Будем при этом предполагать, что $\psi(t) \geqslant 0$, а $\varphi(t)$ — строго возрастающая функция с непрерывной φ', причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда, по теореме об обратной функции, t определяется как непрерывная функция от x, $t = \omega(x)$, и тем самым, $y = \psi(\omega(x))$, т. е. данная кривая является графиком функции одной переменной. Площадь подграфика этой функции равна

$$\int\limits_a^b \psi(\omega(x))\, dx.$$

В интеграле произведем замену переменной по формуле $x = \varphi(t)$. Так как $\omega(\varphi(t)) = t$, то

$$\int\limits_a^b \psi(\omega(x))\, dx = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt.$$

Таким образом,

$$\mu P = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt.$$

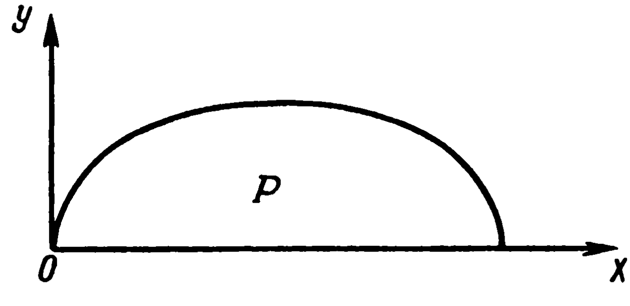

Рис. 8.

Пример. Вычислить площадь фигуры, заключенной между одной аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

и осью OX (рис. 8).

Чтобы применить только что выведенную формулу, находим $x'_t = a(1 - \cos t)$. Тогда

$$\mu P = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2} t - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Приведем еще некоторые примеры.

1. Найти площадь фигуры, заключенной между параболами $y = x^2 + 1$ и $y = 9 - x^2$ (рис. 9). Точнее, речь идет о множестве

$$P = \{(x, y);\quad x^2 + 1 \leqslant y \leqslant 9 - x^2\}.$$

Решая совместно уравнения двух данных парабол, находим абсциссы точек их пересечения: $x = \pm 2$.

Данную фигуру можно представить как разность двух криволинейных трапеций — подграфиков функций $y = 9 - x^2$ и $y = x^2 + 1$ на отрезке $[-2, 2]$. Более точно,

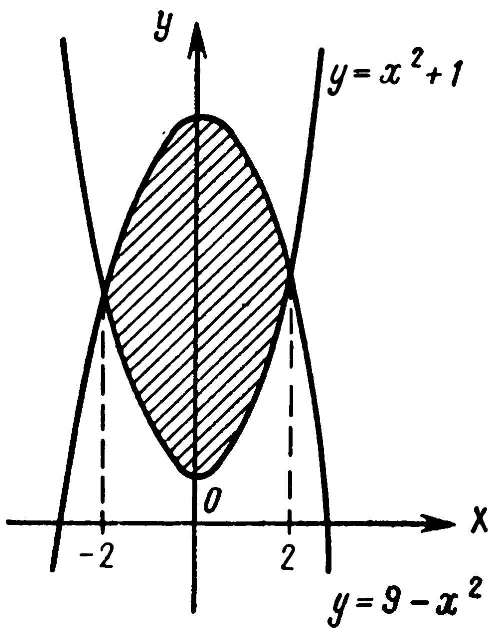

Рис. 9.

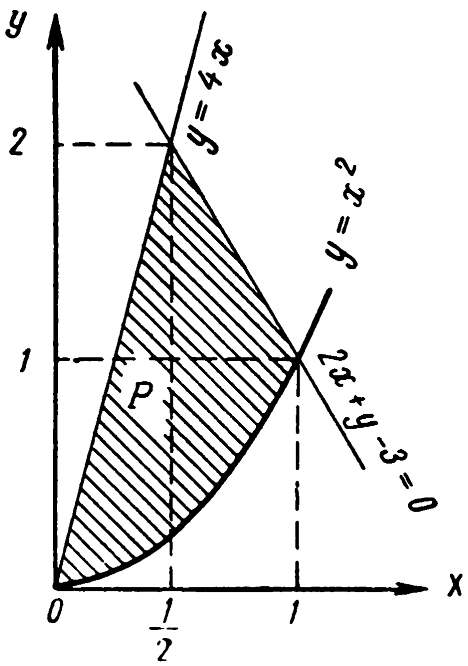

Рис. 10.

$$P = \{(x, y);\quad -2 \leqslant x \leqslant 2,\quad 0 \leqslant y \leqslant 9 - x^2\} \setminus$$
$$\setminus \{(x, y);\quad -2 \leqslant x \leqslant 2,\quad 0 \leqslant y < x^2 + 1\}.$$

Однако нетрудно показать, что множества

$$\{(x, y);\ -2 \leqslant x \leqslant 2,\quad 0 \leqslant y < x^2 + 1\}$$

и

$$\{(x, y);\ -2 \leqslant x \leqslant 2,\quad 0 \leqslant y \leqslant x^2 + 1\}$$

имеют одну и ту же меру, т. е. множество точек, лежащих на самой параболе $y = x^2 + 1$, имеет меру 0. Подробнее на этом мы не останавливаемся. Таким образом, вследствие аддитивности меры,

$$\mu P = \int_{-2}^{2} (9 - x^2)\, dx - \int_{-2}^{2} (x^2 + 1)\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\, dx = \left(8x - \frac{2}{3} x^3\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{64}{3}.$$

2. Найти площадь фигуры P, заключенной между параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 4x$ и $2x + y - 3 = 0$ и расположенной ниже указанных прямых (см. рис. 10).

Точка $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ пересечения данных прямых, а также и точки их пересечения с параболой находятся из уравнений. Обозначим через P_1 подграфик функции $y = 4x$ на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, P_2 — подграфик функции $y = 3 - 2x$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, P_3 — подграфик функции $y = x^2$ на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$\mu P = \mu P_1 + \mu P_2 - \mu P_3.$$

Так как P_1 — треугольник, а P_2 — трапеция, то их площади могут быть найдены по формулам из элементарной геометрии:

$$\mu P_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu P_2 = \frac{3}{4}$$

(впрочем, эти результаты, конечно, могут быть получены и с помощью интегралов). Далее,

$$\mu P_3 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Отсюда

$$\mu P = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{11}{12}.$$

Упражнения

1. Найти площадь фигуры

$$P = \{(x, y);\quad -1 \leqslant x \leqslant 2,\quad 0 \leqslant y \leqslant -x^2 + x + 6\}.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой:

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t\,(a > 0).$$

Указание. Использовать симметрию астроиды относительно обеих координатных осей.

3. Найти площадь фигуры

$$P = \{(x, y);\ x^2 - x - 6 \leqslant y \leqslant 4 - x\}$$

4. Найти площадь фигуры

$$P = \{x, y);\ x + y \leqslant 4,\ y - x \leqslant 5,\ y \geqslant x^2 - x - 6\}.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 6x$ и нормалью к ней, наклоненной к оси абсцисс под углом $\frac{3}{4}\pi$.

§ 3. Площадь криволинейного сектора

Криволинейным сектором называют фигуру P, ограниченную кривой, уравнение которой в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, причем $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$ (см. рис. 11). Точнее, P есть множество всех точек (ρ, φ), полярные координаты которых удовлетворяют условиям:

$$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant f(\varphi).$$

При этом функция f предполагается непрерывной и неотрицательной на отрезке $[\alpha, \beta]$. Таким образом, криволинейный сектор это — аналог криволинейной трапеции, который естественно получается, если вместо прямоугольных координат пользоваться полярными. Частным случаем криволинейного сектора является круговой; для него кривая $\rho = f(\varphi)$ — дуга окружности, следовательно, функция f должна иметь постоянное значение, равное радиусу окружности.

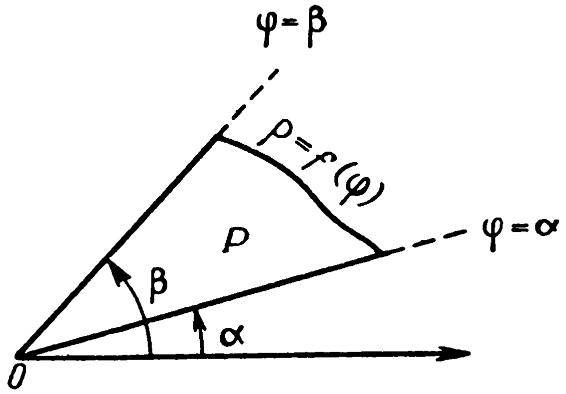

Рис. 11.

Из той системы аксиом для меры, которая была сформулирована в предыдущем параграфе, м о ж н о   в ы в е с т и, что: 1) криволинейный сектор измерим; 2) мера кругового сектора равна его площади, вычисленной в элементарной геометрии. Оба эти факта мы примем без доказательства и ограничимся лишь задачей вывести формулу для вычисления меры криволинейного сектора. Вывод этой формулы будет очень похож на вывод формулы для площади криволинейной трапеции. Меру криволинейного сектора называют также *площадью*.

Пусть Δ — произвольный отрезок, содержащийся в $[\alpha, \beta]$; $\Delta = [\gamma, \delta]$. Обозначим через $\Phi(\Delta)$ площадь криволинейного сектора P_Δ, вырезанного из P лучами $\varphi = \gamma$ и $\varphi = \delta$, т. е. меру множества

$$\{(\rho, \varphi);\ \gamma \leqslant \varphi \leqslant \delta, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant f(\varphi)\}.$$

Так же, как в предыдущем параграфе, из аддитивности меры легко следует, что Φ — аддитивная функция отрезка. Далее, положим

$$R_\Delta = \max_{\varphi \in \Delta} f(\varphi), \quad r_\Delta = \min_{\varphi \in \Delta} f(\varphi),$$

$$M_\Delta = \max_{\varphi \in \Delta} \frac{1}{2} f^2(\varphi), \quad m_\Delta = \min_{\varphi \in \Delta} \frac{1}{2} f^2(\varphi)$$

(функция f^2 непрерывна вместе с f). Тогда

$$M_\Delta = \frac{1}{2} R_\Delta^2, \quad m_\Delta = \frac{1}{2} r_\Delta^2.$$

Наряду с P_Δ рассмотрим два круговых сектора S'_Δ и S''_Δ, ограниченных теми же лучами $\varphi = \gamma$ и $\varphi = \delta$ и дугою окружности с радиусом $\rho = r_\Delta$ и $\rho = R_\Delta$ соответственно. Тогда $S'_\Delta \subset P_\Delta \subset S''_\Delta$ (рис. 12) и потому

$$\mu S'_\Delta \leqslant \mu P_\Delta \leqslant \mu S''_\Delta.$$

Но

$$\mu S'_\Delta = \frac{1}{2} r_\Delta^2 (\delta - \gamma) = \frac{1}{2} r_\Delta^2 |\Delta| = m_\Delta |\Delta|,$$

$$\mu S''_\Delta = \frac{1}{2} R_\Delta^2 (\delta - \gamma) = \frac{1}{2} R_\Delta^2 |\Delta| = M_\Delta |\Delta|,$$

следовательно,

$$M_\Delta |\Delta| \leqslant \mu P_\Delta \leqslant M_\Delta |\Delta|.$$

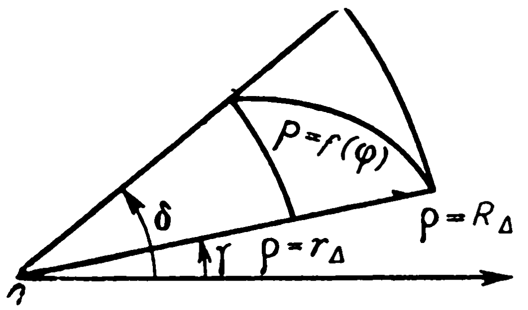

Рис. 12.

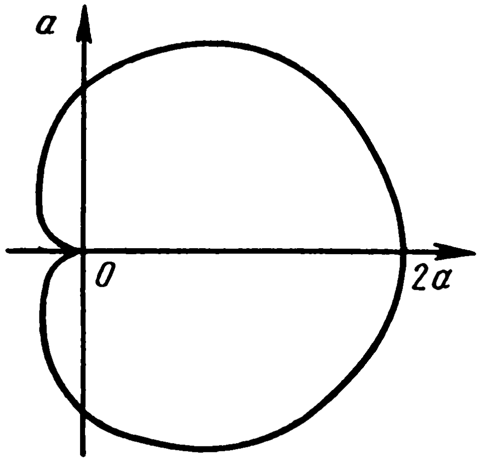

Рис. 13.

Из этого неравенства и определения чисел M_Δ и m_Δ по теореме 1 следует, что функция $\frac{1}{2} f^2$ — плотность для Φ, а

$$\mu P = \Phi([\alpha, \beta]) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2 \, d\varphi. \tag{3}$$

Это и есть формула для площади криволинейного сектора. Ее часто записывают и в такой форме

$$\mu P = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2 \, d\varphi, \tag{3'}$$

понимая при этом, что вместо ρ нужно подставить функцию $\rho = f(\varphi)$.

Пример. Вычислить площадь фигуры P, заключенной внутри кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ ($a > 0$ — постоянная).

Чтобы получить всю кривую, называемую кардиоидой, нужно потребовать, чтобы φ «пробегало» отрезок $[0, 2\pi]$. Если при этом проследить за характером изменения ρ, то нетрудно установить, что кардиоида имеет вид, изображенный на рис. 13. Чтобы рассматривать множество P как криволинейный сектор, нужно считать, что

$$\alpha = 0, \ \beta = 2\pi, \ f(\varphi) = a(1 + \cos\varphi).$$

Тогда, по формуле (3)

$$\mu P = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Упражнения

6. Вычислить площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $\rho = 4\cos\varphi$ и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

7. Вычислить площадь фигуры, заключенной внутри лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

8. Вычислить площадь фигуры, заключенной внутри одной петли «трехлепестковой розы» $\rho = a\sin 3\varphi$ $(a > 0)$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$x^4 + y^4 = x^2 + y^2.$$

Указание. Перейти к полярным координатам.

§ 4. Объем тела вращения

Чтобы решить задачу об объеме тела вращения, нужно пользоваться понятием меры для пространственных множеств, т. е. для множеств, содержащихся в трехмерном пространстве. К такой мере так же, как и к мере на плоскости, мы подойдем аксиоматически. Именно так же, как и в § 2, будем предполагать, что в трехмерном пространстве выделен класс множеств, называемых *измеримыми*, и на этом классе задана функция μ, называемая *мерой*, обладающая свойствами I—V (см. § 2), из которых I, IV и V формулируются в точности так же, как для меры на плоскости, а II и III принимают теперь следующий вид:

II′) любой параллелепипед измерим и его мера равна его объему;

III′) любое множество, расположенное в одной плоскости, измеримо и его мера равна нулю.

Из этой системы аксиом можно вывести, что прямой круговой цилиндр измерим и что его мера совпадает с его объемом, вычисляемым в элементарной геометрии.

Теперь перейдем к точному описанию тех тел вращения, мера которых будет вычисляться в этом параграфе. Пусть на плоскости XOY задана криволинейная трапеция P — подграфик непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$. Будем вращать эту криволинейную трапецию вокруг оси OX (делая при этом полный оборот). Получим множество V, состоящее из всех точек, координаты которых удовлетворяют условиям

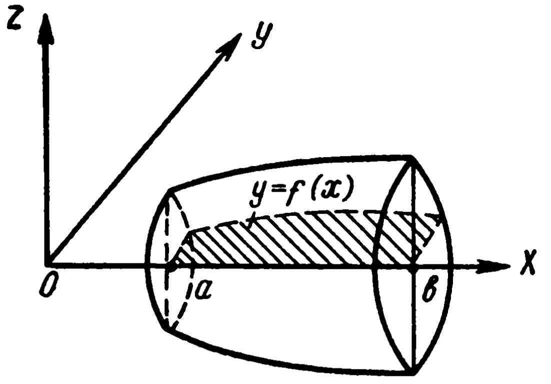

Рис. 14.

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant f(x).$$

Такое множество V мы и будем понимать в этом параграфе под телом вращения (рис. 14).

Т е о р е м а 3. *Тело вращения V измеримо и*

$$\mu V = \pi \int_a^b f^2 \, dx. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем измеримость множества V. Для этого возьмем произвольное разбиение τ отрезка $[a, b]$ с помощью точек $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Положим

$$M_i = \max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x), \quad m_i = \min_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Далее, обозначим через U_i и W_i прямые круговые цилиндры, осью которых служит отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ оси OX, основания лежат в плоскостях $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$ и радиусы оснований равны m_i и M_i (соответственно). Наконец, положим $U = \bigcup_{i=0}^{n-1} U_i$, $W = \bigcup_{i=0}^{n-1} W_i$. Из аксиом II, III и IV легко следует, что множества U и W измеримы и при этом

$$\mu U = \sum_{i=0}^{n-1} \mu U_i = \pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 \Delta x_i,$$

$$\mu W = \sum_{i=0}^{n-1} \mu W_i = \pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 \Delta x_i.^*$$

---

* Чтобы использовать аддитивность меры, нужно круги, составляющие общие части оснований двух соседних цилиндров, относить только к одному из них. По аксиоме III такой круг имеет меру нуль и его удаление из поверхности цилиндра не повлияет ни на измеримость ни на меру, т. е. оставшийся после этого незамкнутый цилиндр также будет измерим и иметь ту же меру.

Кроме того, ясно, что U — множество, получающееся при вращении вокруг оси OX ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников и содержащейся в P, а W получается при вращении ступенчатой фигуры, содержащей в себе P. Поэтому $U \subset V \subset W$ (ср. рис. 2).

С другой стороны, функция f^2 непрерывна, а

$$M_i^2 = \max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f^2(x), \quad m_i^2 = \min_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f^2(x)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Повторяя рассуждение, встречавшееся у нас уже много раз, мы легко убедимся, что за счет ранга разбиения τ разность $\mu W - \mu U$ можно сделать сколь угодно малой, а тогда измеримость множества V вытекает из аксиомы V.

Приступаем к выводу формулы (4). Для любого отрезка $\Delta = [\alpha, \beta]$, содержащегося в $[a, b]$, положим

$$M_\Delta = \max_{x \in \Delta} \pi f^2(x), \quad m_\Delta = \min_{x \in \Delta} \pi f^2(x).$$

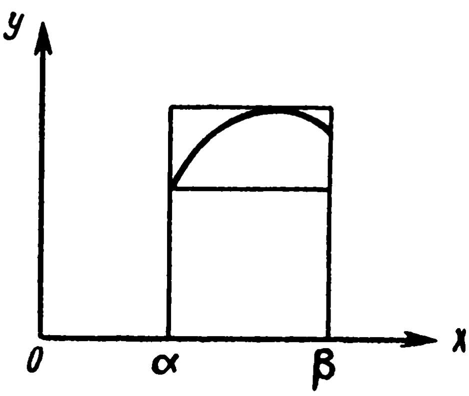

Рис. 15.

Через $\Phi(\Delta)$ обозначим меру того множества V_Δ, которое вырезается из V плоскостями $x = \alpha$ и $x = \beta$:

$$V_\Delta = \{(x, y, z);\ \ \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ \ \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant f^2(x)\}.$$

V_Δ — тоже тело вращения, а потому, по доказанному, оно измеримо. При этом Φ — аддитивная функция отрезка. В плоскости XOY построим прямоугольники с основанием Δ и высотами, равными $\max\limits_{x \in \Delta} f(x)$ и $\min\limits_{x \in \Delta} f(x)$ (рис. 15). Вращая эти прямоугольники, получим два круговых цилиндра, между объемами которых содержится μV_Δ:

$$\pi\,(\min_{x \in \Delta} f(x))^2\,|\Delta| \leqslant \mu V_\Delta \leqslant \pi\,(\max_{x \in \Delta} f(x))^2\,|\Delta| \tag{5}$$

или

$$m_\Delta\,|\Delta| \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant M_\Delta\,|\Delta|.$$

Отсюда по теореме 1 уже сразу вытекает формула (4). Меру тела вращения называют также *объемом*.

Примеры.

1. Вычислить объем тела V, получающегося при вращении вокруг оси OX криволинейной трапеции

$$P = \{(x, y);\ \ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ \ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}.$$

По формуле (4)

$$\mu V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

2. Вычислить объем прямого кругового конуса V с радиусом основания r и высотой h.

Чтобы получить указанный конус, нужно взять прямоугольный треугольник с катетами r и h и вращать его вокруг катета, имеющего длину h. Поместим этот треугольник так, как указано на рис. 16. Тогда он окажется подграфиком функции $f(x) = \frac{r}{h}x$ на отрезке $[0, h]$. Следовательно, по формуле (4)

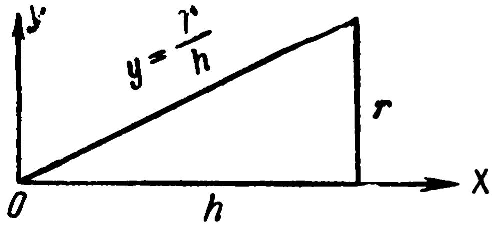

Рис. 16.

$$\mu V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2\, dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Мы пришли к формуле, известной из элементарной геометрии.

3. Вычислить объем тела V, получающегося при вращении вокруг оси OX круга $x^2 + (y - b)^2 \leqslant r^2$ $(0 < r \leqslant b)$ (см. рис. 17). Это тело называется *тором* и имеет форму бублика.

Поскольку данный круг можно представить как разность двух криволинейных трапеций, то и тело V получается как разность двух тел вращения V_1 и V_2, где

$$\mu V_1 = \pi \int_{-r}^{r} y_1^2 dx, \quad \mu V_2 = \pi \int_{-r}^{r} y_2^2\, dx;$$

здесь y_1 и y_2 находятся из уравнения той окружности $x^2 + (y - b)^2 = r^2$, которая служит границей данного круга

$$y_{1,2} = b \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

(знак плюс соответствует верхней полуокружности, знак минус — нижней).* Таким образом,

$$\mu V = \mu V_1 - \mu V_2 = \pi \int_{-r}^{r} (y_1^2 - y_2^2)\, dx.$$

Но

$$y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 4b\sqrt{r^2 - x^2},$$

* То обстоятельство, что в V_2 не нужно включать точки, получающиеся при вращении дуги нижней полуокружности, не играет роли, аналогично тому, как это было в задачах на вычисление площади. Эти точки образуют множество меры нуль.

следовательно,

$$\mu V = 4\pi b \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Применим подстановку $x = r \sin t, -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда $dx = r \cos t\, dt$ и

$$\mu V = 4\pi b r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2\pi b r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt =$$

$$= 2\pi b r^2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi^2 b r^2.$$

Сделаем одно общее замечание по поводу выводов формул для площадей и объемов. Во всех разобранных случаях вывод фактически сводился к определению плотности для вспомогательной, но составляемой естественным способом, аддитивной функции отрезка. При этом, формулируя теоремы, мы фактически уже указывали плотность; например, в теореме об объеме тела вращения указана плотность πf^2. Спрашивается, нет ли здесь чрезмерной искусственности и какие соображения могли навести на то, что плотность здесь именно такова. Ответ на этот вопрос дает неравенство (5). К этому неравенству мы пришли естественным путем, сравнивая тело вращения с двумя прямыми круговыми цилиндрами. А это неравенство само уже подсказывает, что плотность равна πf^2. Аналогичные соображения подсказывают выбор плотности и в других выводах, встречающихся в этой главе.

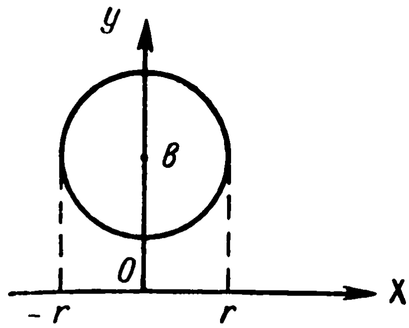

Рис. 17.

Упражнения

10. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры

$$P = \{(x, y);\ \ 0 \leqslant y \leqslant 2x - x^2\} \text{ вокруг оси } OX.$$

11. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры

$$P = \{(x, y);\ \ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\} \text{ вокруг оси } OX.$$

12. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры

$$P = \{(x, y);\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant 2,\ x + y \leqslant 4\} \text{ вокруг оси } OY.$$

Указание. Воспользуемся формулой, которая получится из (4), если оси OX и OY поменять ролями.

13. Найти объем тела, полученного при вращении полукруга $P = \{(x, y);\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}\}$ вокруг прямой $y = R$.

Указание. Перенести начало координат в точку $(0, R)$.

§ 5. Статические моменты и центр тяжести криволинейной трапеции

Понятие статического момента может быть введено как для точки, так и для системы точек и для произвольного ограниченного измеримого множества. Мы ограничимся рассмотрением этого вопроса на плоскости.

Пусть в точке $M(x, y)$, лежащей на плоскости XOY, сосредоточена масса m. Иными словами, эта точка рассматривается как «материальная». Ее *статическим моментом относительно оси* OX называется произведение my, а *статическим моментом относительно оси* OY — произведение mx. Таким образом, статический момент есть произведение массы, сосредоточенной в данной точке, на ее расстояние до оси, взятое с определенным знаком в зависимости от того, по какую сторону от оси находится данная точка.

Статический момент конечной системы «материальных» точек относительно какой-нибудь оси определяется как сумма статических моментов всех точек этой системы относительно той же оси. Ясно, что если вся система располагается в верхней полуплоскости ($y \geqslant 0$), то ее статический момент относительно оси OX неотрицателен. Также неотрицательным будет статический момент относительно оси OY, если вся система расположена в правой полуплоскости ($x \geqslant 0$).

Перейдем к аксиоматическому описанию статических моментов для ограниченных измеримых множеств. Будем предполагать, что на совокупности всех ограниченных измеримых множеств на плоскости * заданы две вещественных функции K_x и K_y, удовлетворяющие следующим четырем условиям:

I) обе функции аддитивны, т. е. если E_1 и E_2 — ограниченные измеримые множества, причем $E_1 \cap E_2 = \Lambda$, а $E = E_1 \cup E_2$, то

$$K_x(E) = K_x(E_1) + K_x(E_2),$$
$$K_y(E) = K_y(E_1) + K_y(E_2);$$

II) если E — ограниченное измеримое множество с $\mu E = 0$, то $K_x(E) = K_y(E) = 0$;

III) если ограниченное измеримое множество E целиком содержится в верхней (соответственно — нижней) полуплоскости, то $K_x(E) \geqslant 0$ (соответственно $K_x(E) \leqslant 0$), если же E содержится в правой (соответственно — левой) полуплоскости, то $K_y(E) \geqslant 0$ (соответственно $K_y(E) \leqslant 0$);

IV) для прямоугольника D, определяемого неравенствами $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $\gamma \leqslant y \leqslant \delta$,

$$K_x(D) = \frac{\gamma+\delta}{2}(\beta-\alpha)(\delta-\gamma) = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\delta^2-\gamma^2),$$

$$K_y(D) = \frac{\alpha+\beta}{2}(\beta-\alpha)(\delta-\gamma) = \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)(\delta-\gamma).$$

---

* Множество называется *ограниченным*, если координаты всех его точек в совокупности ограничены.

Функции K_x и K_y, удовлетворяющие всем перечисленным условиям, и называются *статическими моментами относительно осей* OX и OY (соответственно).

Аксиома III подсказана аналогичными свойствами статических моментов системы точек. Смысл аксиомы IV заключается в том, что статические моменты прямоугольника D равны одноименным статическим моментам точки, находящейся на пересечении диагоналей прямоугольника D (это — его центр тяжести), в которой сосредоточена масса, численно равная площади прямоугольника D.

Для того чтобы доказать существование статических моментов, а также и их единственность, т. е. что аксиомами I—IV они определяются однозначно, необходима более общая теория интеграла. Мы же ограничимся здесь более простой задачей: принимая без доказательства существование статических моментов, вычислим их для криволинейной трапеции

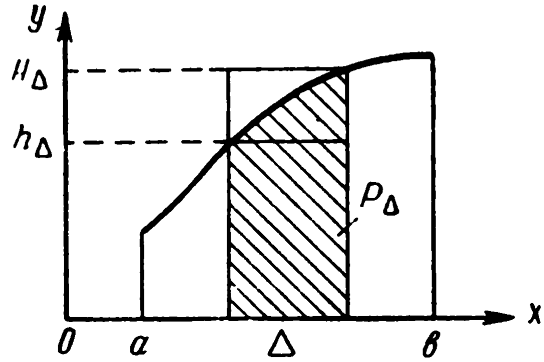

Рис. 18.

$$P = \{(x, y);\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

(функция f непрерывна).

Приступаем к вычислению K_x. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$—произвольный отрезок, содержащийся в $[a, b]$, а

$$P_\Delta = \{(x, y);\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

имеет тот же смысл, что и в § 2 (см. рис. 18). Положим $\Phi(\Delta) = K_x(P_\Delta)$. Так же, как и в § 2, проверяется, что Φ — аддитивная функция отрезка. Наконец, положим

$$h_\Delta = \min_{x \in \Delta} f(x), \quad H_\Delta = \max_{x \in \Delta} f(x)$$

и построим два прямоугольника Q_Δ и R_Δ с основанием Δ и высотами, равными h_Δ и H_Δ (соответственно). Тогда $Q_\Delta \subset P_\Delta \subset R_\Delta$. Из аддитивности момента K_x и аксиомы III следует, что

$$K_x(Q_\Delta) \leqslant K_x(P_\Delta) \leqslant K_x(R_\Delta). \tag{6}$$

Но по аксиоме IV

$$K_x(Q_\Delta) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) h_\Delta^2, \quad K_x(R_\Delta) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) H_\Delta^2.$$

Положим

$$M_\Delta = \frac{1}{2} H_\Delta^2 = \max_{x \in \Delta} \frac{1}{2} f^2(x), \quad m_\Delta = \frac{1}{2} h_\Delta^2 = \min_{x \in \Delta} \frac{1}{2} f^2(x).$$

Тогда неравенство (6) принимает вид

$$m_\Delta |\Delta| \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant M_\Delta |\Delta|,$$

следовательно, по теореме 1, функция $\frac{1}{2} f^2$ — плотность для Φ и

$$K_x(P) = \Phi([a, b]) = \frac{1}{2} \int_a^b f^2 \, dx.$$

Для упрощения подсчета $K_y(P)$ дополнительно предположим, что трапеция P расположена справа от оси OY. Однако, получаемая ниже формула справедлива и без этого предположения.

Пусть на этот раз $\Phi(\Delta) = K_y(P_\Delta)$, а Q_Δ и R_Δ сохраняют прежний смысл. Снова имеем, что

$$K_y(Q_\Delta) \leqslant K_y(P_\Delta) \leqslant K_y(R_\Delta).$$

Но по аксиоме IV

$$K_y(Q_\Delta) = \frac{\alpha+\beta}{2}|\Delta| h_\Delta \geqslant \alpha h_\Delta |\Delta|,$$

$$K_y(R_\Delta) = \frac{\alpha+\beta}{2}|\Delta| H_\Delta \leqslant \beta H_\Delta |\Delta|.$$

Следовательно,

$$\alpha h_\Delta |\Delta| \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant \beta H_\Delta |\Delta|.$$

Положим

$$m_\Delta = \alpha h_\Delta, \quad M_\Delta = \beta H_\Delta.$$

Тогда

$$m_\Delta \leqslant xf(x) \leqslant M_\Delta \text{ для всех } x \in \Delta.$$

Проверим, что $M_\Delta - m_\Delta \to 0$ при $|\Delta| \to 0$. Действительно,

$$M_\Delta - m_\Delta = \beta H_\Delta - \alpha h_\Delta = (\beta - \alpha) H_\Delta +$$

$$+ \alpha(H_\Delta - h_\Delta) \leqslant |\Delta| \max_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) + b(H_\Delta - h_\Delta) \to 0,$$

поскольку $H_\Delta - h_\Delta \to 0$ при $|\Delta| \to 0$. Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены, следовательно, $xf(x)$ — плотность для Φ и

$$K_y(P) = \int_a^b xf(x)\,dx.$$

Выведенные формулы обычно записывают так:

$$K_x(P) = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \quad K_y(P) = \int_a^b xy\,dx.$$

Заметим, что в последнем выводе m_Δ и M_Δ могут не совпадать с наименьшим и наибольшим значениями функции $xf(x)$ на Δ* и потому нам пришлось здесь применить теорему 1 в ее общей формулировке.

Центр тяжести криволинейной трапеции P можно найти как точку C с координатами

$$x_C = \frac{K_y(P)}{\mu P}, \quad y_C = \frac{K_x(P)}{\mu P}. \tag{7}$$

---

* Наименьшее (наибольшее) значение произведения может не равняться произведению наименьших (наибольших) значений сомножителей.

Это значит, что если в точке C сосредоточить массу, численно равную площади трапеции P, то статические моменты этой точки относительно обеих осей будут те же, что и для трапеции P.

Хотя по формулам (7) мы определяем положение центра тяжести, пользуясь определенной координатной системой, на самом деле центр тяжести плоской фигуры зависит лишь от чисто геометрических свойств фигуры и его положение относительно этой фигуры (но, конечно, не его координаты) не зависит от выбора координатной системы.

Иногда центр тяжести легко находить, опираясь на соображения симметрии. Например, если трапеция P симметрична относительно оси OY, то ее центр тяжести лежит на этой оси, т. е. $x_C = 0$. Следовательно, и $K_y(P) = 0$.

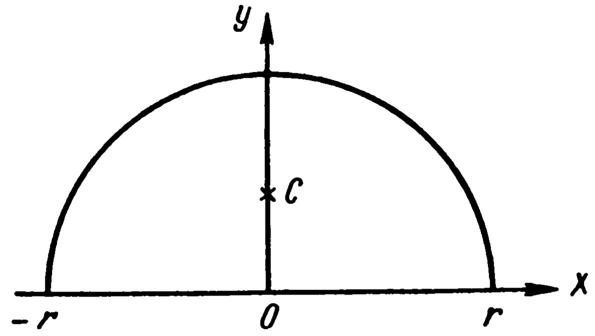

Рис. 19.

Пример. Найти центр тяжести полукруга P радиуса r.

Выберем координатные оси так, как указано на рис. 19. Тогда, согласно предыдущему замечанию, $x_C = 0$. Для нахождения y_C вычисляем $K_x(P)$.

Уравнение полуокружности, подграфиком которой служит P, имеет вид

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Следовательно,

$$K_x(P) = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} = \frac{2}{3}r^3.$$

Так как $\mu P = \frac{1}{2}\pi r^2$, то $y_C = \frac{4}{3\pi}r$.

Сопоставляя формулы для K_x и для объема тела вращения (формула (4)), видим, что $\mu V = 2\pi K_x(P)$. А тогда $\mu V = 2\pi y_C \mu P$ (в последнем равенстве одной и той же буквой μ обозначены слева — пространственная мера, а справа — плоская). Мы пришли к одной из теорем, носящих имя швейцарского математика П. Гульдина (1577—1643): *объем тела, получаемого при вращении криволинейной трапеции P вокруг ее основания, равен произведению площади трапеции P на длину окружности, описываемой при вращении ее центром тяжести.* Эта теорема справедлива и для плоских фигур более общего вида, чем криволинейные трапеции, однако при условии, что ось вращения не пересекает вращаемую фигуру.

С помощью теоремы Гульдина легко подсчитать объем тора (см. пример 3 в конце предыдущего параграфа). Действительно, площадь вращающегося круга равна πr^2, а длина окружности, описываемой при этом вращении центром круга, равна $2\pi b$. Отсюда сразу получается, что объем тора равен $2\pi^2 br^2$.

Упражнения

14. Найти статические моменты K_x, K_y фигуры

$$P = \{(x, y);\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 6\}.$$

15. Найти координаты центра тяжести фигуры

$$P = \{(x, y);\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant 5\}.$$

16. Найти координаты центра тяжести фигуры

$$P = \left\{(x, y);\ 1 \leqslant x \leqslant 4,\ \frac{1}{4} x^2 \leqslant y \leqslant \frac{1}{4} x^2 + 2\right\}.$$

17. Найти координаты центра тяжести фигуры

$$P = \left\{(x, y);\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\},$$

т. е. одной четверти внутренности эллипса.

§ 6. Длина пути

Рассматривая различные кривые, мы обычно задаем их уравнениями. При этом чаще всего оказываются удобными параметрические уравнения. Для кривых на плоскости это будут уравнения вида $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Однако, задавая кривую параметрическими уравнениями, мы указываем не только некоторую совокупность точек, но и способ, которым эта совокупность описывается при изменении параметра t. Например, если параметр t возрастает от 0 до 2π, то уравнения

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t$$

определяют, как известно, окружность радиуса r. Однако, если промежуток изменения t будет $[0, 4\pi]$, то те же уравнения определят окружность радиуса r, но описываемую два раза. Путь, который пройдет при этом движущаяся точка, будет в два раза длиннее, чем в первом случае. В связи со всеми этими соображениями основным понятием в этом параграфе будет понятие пути.

Определение. *Путем* на плоскости называется отображение γ некоторого отрезка $[a, b]$ на множество точек плоскости

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{8}$$

причем обе функции φ и ψ непрерывны. Если существуют непрерывные производные φ' и ψ', то путь γ называется *гладким*.

Если точку с координатами x и y обозначить буквой M, то путь можно записать и в такой форме: $M = \gamma(t)$. Точка $A = \gamma(a)$ называется *началом пути* γ, точка $B = \gamma(b)$ — *концом* пути γ. Если $A = B$, то путь γ называется *замкнутым*. Совокупность всех точек, определяемых формулами (8), т. е. образ всего отрезка $[a, b]$ при отображении γ, называется *носителем* пути γ. Если функции φ и ψ имеют постоянные значения, то носитель состоит из одной точки.

Пусть отрезок $[a', b'] \subset [a, b]$. Сужение отображения γ на отрезке $[a', b']$ называется *участком* пути γ.

Переходим к определению длины пути. Пусть τ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ на конечное число отрезков с помощью точек $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ и пусть $M_i(x_i, y_i) = \gamma(t_i)$. Составим сумму

$$p(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i, M_{i+1})\ *$$

($p(\tau)$ — длина ломаной $M_0 M_1 \ldots M_n$, «вписанной» в путь γ; см. рис. 20). Тогда

$$l(\gamma) = \sup_{\tau} p(\tau),$$

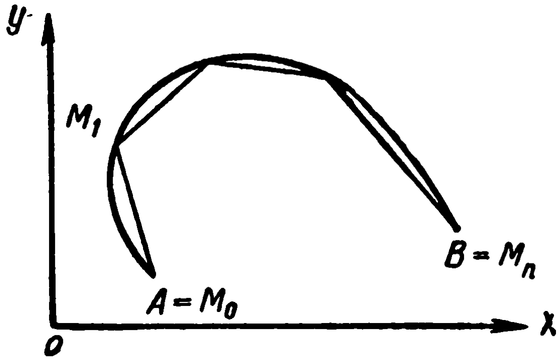

Рис. 20.

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям τ, называется *длиной* пути γ. Ясно, что $0 \leqslant l(\gamma) \leqslant \leqslant +\infty$. Если путь имеет конечную длину, то он называется *спрямляемым*.

Если разбиение τ состоит всего из одного отрезка $[a, b]$, т. е. $a = t_0 < t_1 = b$, то ломаная превращается в хорду AB, и $p(\tau) = \rho(A, B)$. Следовательно, $l(\gamma) \geqslant \rho(A, B)$.

Будем говорить, что разбиение τ' *мельче* разбиения τ, если все точки деления разбиения τ входят в число точек деления разбиения τ'.

Лемма. *Если разбиение τ' мельче разбиения τ, то $p(\tau') \geqslant p(\tau)$.*

Доказательство. Так как добавление новых точек к точкам деления разбиения τ можно производить последовательно добавляя по одной точке, то достаточно доказать лемму для случая, когда τ' отличается от τ одной лишь точкой деления. Пусть эта точка t' находится между t_j и t_{j+1} и пусть $M' = \gamma(t')$. Так как

$$\rho(M_j, M_{j+1}) \leqslant \rho(M_j, M') + \rho(M', M_{j+1}),$$

то

$$p(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i, M_{i+1}) \leqslant \sum_{i=0}^{j-1} \rho(M_i, M_{i+1}) + \rho(M_j, M') + \rho(M', M_{j+1}) + \sum_{i=j+1}^{n-1} \rho(M_i, M_{i+1}) = p(\tau').$$

* Для любых двух точек M и N $\rho(M, N)$ означает расстояние между ними.

Теорема 4 (аддитивность длины пути). *Пусть γ — путь, заданный на отрезке $[a, b]$ и пусть $a < c < b$, γ_1 — сужение пути γ на отрезке $[a, c]$, γ_2 — сужение пути γ на отрезке $[c, b]$. Тогда*

$$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть τ_1 — произвольное разбиение отрезка $[a, c]$ с помощью точек

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = c,$$

а τ_2 — произвольное разбиение отрезка $[c, b]$ с помощью точек

$$c = t_k < t_{k+1} < \cdots < t_n = b.$$

Тогда точки $t_0, t_1, \ldots, t_n$ образуют разбиение τ отрезка $[a, b]$. При этом $p(\tau) = p(\tau_1) + p(\tau_2)$. Если хоть одна из длин $l(\gamma_1)$ или $l(\gamma_2)$ равна $+\infty$, то $p(\tau_1)$ или $p(\tau_2)$ может быть сколь угодно большой. Но тогда и $p(\tau)$ может быть сколь угодно большой, следовательно, $l(\gamma) = +\infty$. Тем самым (9) справедливо.

Пусть $l(\gamma_1) < +\infty$ и $l(\gamma_2) < +\infty$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем τ_1 и τ_2 так, что

$$p(\tau_1) > l(\gamma_1) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad p(\tau_2) > l(\gamma_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$p(\tau) > l(\gamma_1) + l(\gamma_2) - \varepsilon.$$

Тем более,

$$l(\gamma) > l(\gamma_1) + l(\gamma_2) - \varepsilon.$$

Благодаря произвольности ε следует, что

$$l(\gamma) \geqslant l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

Теперь возьмем произвольное разбиение τ отрезка $[a, b]$. К числу его точек деления добавим c, получим новое разбиение τ'. По лемме $p(\tau) \leqslant p(\tau')$. Перенумеруем точки, с помощью которых составлено τ':

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = c < t_{k+1} < \cdots < t_l = b.$$

Попутно мы получили разбиение τ_1 отрезка $[a, c]$ с помощью точек $t_0, t_1, \ldots, t_k$ и разбиение τ_2 отрезка $[c, b]$ с помощью точек $t_k, t_{k+1}, \ldots, t_l$. Имеем

$$p(\tau) \leqslant p(\tau') = p(\tau_1) + p(\tau_2) \leqslant l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

Отсюда, переходя в левой части к верхней грани, получаем $l(\gamma) \leqslant l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. Это, вместе с установленным выше противоположным неравенством, и дает (9).

Следствие. *Если путь γ спрямляем, то и любой его участок спрямляем.*

Действительно, из (9) следует, что если $l(\gamma) < +\infty$, то $l(\gamma_1)$ и $l(\gamma_2)$ тоже $<+\infty$. Если же $a < a' < b' < b$, а γ', γ_1 и γ_2 — сужение пути γ на отрезке $[a', b']$, $[a, a']$ и $[b', b]$ (соответственно), то $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma') + l(\gamma_2)$, следовательно, и $l(\gamma') < +\infty$.

Для доказательства основной теоремы этого параграфа нам полезно следующее неравенство: если $C \geqslant c \geqslant 0$, $D \geqslant d \geqslant 0$, то

$$\sqrt{C^2 + D^2} - \sqrt{c^2 + d^2} \leqslant (C - c) + (D - d). \tag{10}$$

Действительно, обозначая через K левую часть неравенства (10), запишем K в виде

$$K = (\sqrt{C^2 + D^2} - \sqrt{c^2 + D^2}) + (\sqrt{c^2 + D^2} - \sqrt{c^2 + d^2}).$$

Далее, вводя функцию $f(x) = \sqrt{x^2 + D^2}$ и применяя к ней на промежутке $[c, C]$ (здесь мы считаем, что $C > c$) формулу Лагранжа, найдем

$$\sqrt{C^2 + D^2} - \sqrt{c^2 + D^2} = f(C) - f(c) =$$

$$= f'(\xi)(C - c) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + D^2}}(C - c) \leqslant C - c \quad (c < \xi < C).$$

Аналогично (при $d < D$)

$$\sqrt{c^2 + D^2} - \sqrt{c^2 + d^2} = \frac{\eta}{\sqrt{c^2 + \eta^2}}(D - d) \leqslant D - d \quad (d < \eta < D).$$

Тем самым неравенство (10) доказано. Если $c = C$ или $d = D$, то доказательство лишь упрощается.

Т е о р е м а 5. *Гладкий путь γ спрямляем и*

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) С п р я м л я е м о с т ь п у т и γ. Положим

$$C = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi'(t)|, \quad D = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\psi'(t)|.$$

Тогда для любых двух точек t', $t'' \in [a, b]$

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| = |\varphi'(t^*)(t' - t'')| \leqslant C|t' - t''|$$

(здесь t^* находится между t' и t''). Аналогично,

$$|\psi(t') - \psi(t'')| \leqslant D|t' - t''|.$$

Теперь для любого разбиения τ отрезка $[a, b]$ оцениваем $p(\tau)$:

$$p(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_{i+1})]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{C^2 + D^2}\, \Delta t_i = \sqrt{C^2 + D^2}\,(b - a).$$

Отсюда

$$l(\gamma) \leqslant \sqrt{C^2 + D^2}(b-a), \tag{12}$$

следовательно, путь γ спрямляем.

б) Докажем формулу (11). Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$ — произвольный отрезок, содержащийся в $[a, b]$, γ_Δ — сужение пути γ на отрезке Δ, $\Phi(\Delta) = l(\gamma_\Delta)$. Тогда, согласно теореме 4, Φ — аддитивная функция отрезка. Найдем ее плотность.

Положим

$$C_\Delta = \max_{t \in \Delta} |\varphi'(t)|, \quad D_\Delta = \max_{t \in \Delta} |\psi'(t)|,$$

$$c_\Delta = \min_{t \in \Delta} |\varphi'(t)|, \quad d_\Delta = \min_{t \in \Delta} |\psi'(t)|.$$

Применяя формулу (12) на отрезке Δ, находим, что

$$\Phi(\Delta) \leqslant \sqrt{C_\Delta^2 + D_\Delta^2}\, |\Delta|.$$

С другой стороны,

$$\Phi(\Delta) = l(\gamma_\Delta) \geqslant \rho(\gamma(\alpha), \gamma(\beta)) =$$
$$= \sqrt{[\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)]^2 + [\psi(\beta) - \psi(\alpha)]^2} =$$
$$= \sqrt{\varphi'^2(t') + \psi'^2(t'')}\,(\beta - \alpha) \geqslant \sqrt{c_\Delta^2 + d_\Delta^2}\, |\Delta|$$

(здесь t', t'' находятся между α и β). Таким образом,

$$m_\Delta |\Delta| \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant M_\Delta |\Delta|,$$

где $m_\Delta = \sqrt{c_\Delta^2 + d_\Delta^2}$, $M_\Delta = \sqrt{C_\Delta^2 + D_\Delta^2}$. При этом $m_\Delta \leqslant \leqslant \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \leqslant M_\Delta$ при $t \in \Delta$. Наконец, из неравенства (10) сразу видно, что

$$M_\Delta - m_\Delta \leqslant (C_\Delta - c_\Delta) + (D_\Delta - d_\Delta)$$

и поэтому $M_\Delta - m_\Delta \to 0$ при $|\Delta| \to 0$. Все условия теоремы 1 выполнены, функция $\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}$ — плотность для Φ и, тем самым, формула (11) доказана.

Иногда все же говорят не только о длине пути, но и о длине к р и в о й. Поясним, каков смысл этого. Назовем путь γ *простым*, если для любых двух не равных значений параметра t_1 и t_2 ($t_1 \neq \neq t_2$), из которых хоть одно отлично от a и b, $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$. Иными словами, путь называется простым, если двум различным значениям параметра может отвечать одна и та же точка только в случае, если эти значения суть a и b (если при этом действительно $\gamma(a) = \gamma(b)$, то это значит, что путь — замкнутый). Носитель простого пути называется *кривой Жордана*.* Если

* К. Жордан (1838—1922) — французский математик.

к тому же путь — гладкий, то и кривая Жордана называется гладкой.

Если кривая Жордана — носитель пути γ, то под ее длиной понимается длина пути $l(\gamma)$. При этом можно доказать, что если одна и та же кривая Жордана — носитель двух путей γ и γ_1, то $l(\gamma) = l(\gamma_1)$, т. е. длина кривой Жордана не зависит от выбора ее параметрического представления.

Частным случаем кривой Жордана является график непрерывной функции f, заданной на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. В этом случае роль параметра играет координата x и путь определяется уравнениями: $x = x$, $y = f(x)$,* т. е. функция φ есть тождественное преобразование, а функция ψ совпадает с f. Тогда $\varphi'(x) \equiv 1$. Если же функция f имеет непрерывную производную, то график f — гладкая кривая Жордана и формула (11) приводит к следующему выражению для ее длины:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{13}$$

Примеры.

1. Вычислить длину дуги параболы $y = \frac{x^2}{2b}$ от начала координат до точки с абсциссой $x = p$ $(p > 0)$.

Применяя формулу (13) и учитывая, что $y' = \frac{x}{p}$, находим

$$l = \int_0^p \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx = \frac{1}{p} \int_0^p \sqrt{x^2 + p^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{p} \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + p^2}\right) \right\} \Big|_0^p =$$

$$= p\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{p}{2} \ln \frac{p(1 + \sqrt{2})}{p} = p\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{p}{2} \ln (1 + \sqrt{2}).$$

2. Вычислить длину одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t), \; 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Находим

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t,$$

$$x_t'^2 + y_t'^2 = a^2 (2 - 2\cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Извлекая корень, получаем

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 2a \cdot \sin \frac{t}{2}.$$

---

* Можно, конечно, записать $x = t$, $y = f(t)$.

При извлечении корня следует обратить внимание на то, что в формуле (11) корень должен быть арифметическим. Следовательно, нужно проверить, что $\sin\frac{t}{2} \geqslant 0$ в промежутке $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Но это так и есть, поскольку $\frac{t}{2} \in [0, \pi]$.

Теперь по формуле (11) находим

$$l = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\cdot dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Остановимся еще на случае, когда путь γ задан в полярных координатах уравнением $\rho = f(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, причем существует непрерывная f'. Переходя к прямоугольным координатам, находим

$$x = \rho\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta = f(\theta)\sin\theta,$$

а этими уравнениями действительно описывается гладкий путь. Роль параметра играет θ.

Имеем

$$x'_\theta = \rho'_\theta\cos\theta - \rho\sin\theta, \quad y'_\theta = \rho'_\theta\sin\theta + \rho\cos\theta.$$

$$x'^2_\theta + y'^2_\theta = \rho^2 + \rho'^2_\theta.$$

Следовательно,

$$l(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}\, d\theta.$$

Пример. Вычислить длину участка логарифмической спирали $\rho = ae^{k\theta}$ от точки, где $\theta = 0$, до точки, где $\theta = \Theta$.

Имеем $\rho' = ake^{k\theta}$, следовательно,

$$l = \int_0^\Theta a\sqrt{1+k^2}e^{k\theta}\, d\theta = \frac{a}{k}\sqrt{1+k^2}\cdot e^{k\theta}\Big|_0^\Theta =$$

$$= \frac{a}{k}\sqrt{1+k^2}\,(e^{k\Theta} - 1).$$

Вернемся к гладкому пути γ, рассмотренному в теореме 5. Положим

$$s = \int_a^t \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt,$$

т. е. s есть длина участка пути γ, соответствующего изменению параметра от начального значения a до некоторого промежуточного значения t ($a \leqslant t \leqslant b$). Тогда s — неубывающая функция от t, $s = 0$ при $t = a$, $s = l(\gamma)$ при $t = b$.

По свойству интеграла с переменным верхним пределом

$$s'_t = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}.$$

Отсюда, умножая обе части на dt и возводя в квадрат, получаем

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

(своеобразный аналог теоремы Пифагора).

Будем называть значение параметра t_0 *особенным*, если $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = 0$. Если для пути γ все значения параметра — неособенные, то $s'_t > 0$ при всех $t \in [a, b]$. А тогда s — строго возрастающая функция от t и соответствие между s и t взаимнооднозначное. В этом случае в уравнениях пути γ можно осуществить замену параметра, перейти от t к новому параметру s $(0 \leqslant s \leqslant l(\gamma))$; получится снова гладкий путь, который обычно отождествляется с γ, т. е. говорят, что это — тот же путь γ, но записанный с помощью параметра s.

Теперь сформулируем одно интересное геометрическое предложение. Пусть для гладкого пути γ значение параметра t_0 неособенное, $M_0 = \gamma(t_0)$, $t \neq t_0$, $M = \gamma(t)$ и $r = \rho(M_0, M)$. Если t достаточно близко к t_0, то $M \neq M_0$, так как в некоторой окрестности t_0 по крайней мере одна из функций φ или ψ строго монотонна.* Пусть l — длина участка пути γ, соответствующего изменению параметра от t_0 до t (для определенности считаем, что $t > t_0$). Тогда

$$\frac{l}{r} \to 1 \text{ при } t \to t_0,$$

т. е. *длины бесконечно малого участка пути и стягивающей его хорды эквивалентны.*

Действительно, на основании (11),

$$l = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} \cdot dt = s(t) - s(t_0).$$

Тогда

$$\frac{l}{r} = \frac{s(t) - s(t_0)}{\sqrt{[\varphi(t) - \varphi(t_0)]^2 + [\psi(t) - \psi(t_0)]^2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}}{\sqrt{\left(\dfrac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0}\right)^2}} \xrightarrow[t \to t_0]{}$$

$$\xrightarrow[t \to t_0]{} \left. \frac{s'_t}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}} \right|_{t = t_0} = 1.$$

---

* Если, например, $\varphi'(t_0) > 0$, то $\varphi'(t) > 0$ и в некоторой окрестности значения t_0, а тогда φ в этой окрестности возрастает.

Упражнения

18. Найти длину пути

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{1}{2} t^2, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

19. Найти длину пути

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -t^2 + 4, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2.$$

20. Найти длину участка кривой $y = \ln \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

21. Найти длину участка кривой, заданной в полярных координатах: $\rho = 4 \cos^3 \frac{\theta}{3}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi$.

22. Найти длину пути

$$\begin{cases} x = \int\limits_1^t \frac{\cos z}{z}\, dz, \\ y = \int\limits_1^t \frac{\sin z}{z}\, dz, \end{cases} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2.$$

от точки (0, 0) до точки с вертикальной касательной.

Указание. Использовать выражение производной от интеграла по верхнему пределу.

§ 7. Площадь поверхности вращения

Обоснование понятия площади поверхности вращения представляет значительно большие трудности, чем те, которые мы преодолевали в предыдущих параграфах, посвященных приложениям определенного интеграла. Поэтому мы не будем вводить здесь ни определения такого типа, как для длины пути, ни аксиоматического описания, а ограничимся некоторыми интуитивными соображениями, приводящими к формуле, которая может быть строго обоснована.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x) \geqslant 0$ с непрерывной производной f'. Рассмотрим поверхность S, получающуюся в результате вращения графика функции f вокруг оси OX на угол 2π. Точнее S определяется следующей формулой:

$$S = \{(x, y, z);\ \ a \leqslant x \leqslant b,\ \ y^2 + z^2 = f^2(x)\}.$$

Заметим, что, в отличие от тела вращения V (в § 4), в S входят только точки, где $y^2 + z^2 = f^2(x)$. Сечение поверхности S плоскостью, перпендикулярной оси OX, окружность с центром в точке на оси OX и радиусом, равным $f(x)$. Для любого отрезка $\Delta = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ обозначим через S_Δ «слой» поверхности S, получаемый за счет вращения сужения графика f на отрезке Δ:

$$S_\Delta = \{(x,\ y,\ z);\ x \in \Delta,\ y^2 + z^2 = f^2(x)\}.$$

Будем считать, что площадь μS поверхности S, а также и любого слоя S_Δ, определена так, что μS_Δ — аддитивная функция отрезка. При малых размерах отрезка Δ соответствующий участок кривой $y = f(x)$ мало отличается от прямолинейного, например, от хорды, соединяющей концы этого участка. Тогда площадь слоя μS_Δ должна быть близка к боковой поверхности усеченного конуса, который получится, если вместо участка кривой $y = f(x)$ вращать хорду. Боковую поверхность этого конуса мы и примем за приближенное значение μS_Δ. При этом самую боковую поверхность конуса мы подсчитаем тоже приближенно. Именно, как доказано в последнем предложении из предыдущего параграфа, длина хорды мало отличается от длины участка кривой, которую мы обозначим через l_Δ. Величину l_Δ мы и примем за длину образующей конуса. Радиусы его оснований, как видно из рис. 21, равны $f(\alpha)$ и $f(\beta)$. С помощью известной формулы для боковой поверхности усеченного конуса получаем

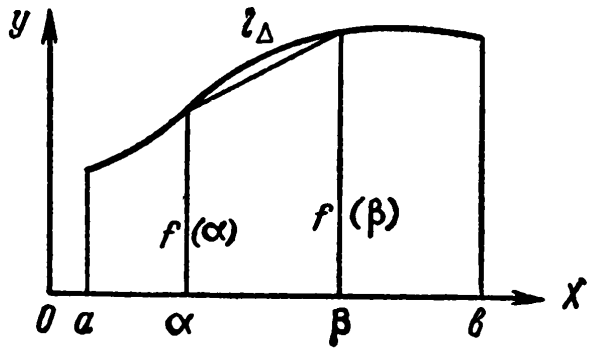

Рис. 21.

$$\mu S_\Delta \approx 2\pi \cdot \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \cdot l_\Delta,$$

или

$$\mu S_\Delta \approx \pi\,[f(\alpha) + f(\beta)]\,\Phi(\Delta), \text{ где } \Phi(\Delta) = l_\Delta.$$

Если теперь стягивать отрезок Δ к некоторой точке x_0, т. е. считать, что α, $\beta \to x_0$, и, тем самым, $|\Delta| \to 0$, то $\frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|}$ будет стремиться к плотности функции Φ в точке x_0, которая была найдена в предыдущем параграфе, а именно к $\sqrt{1 + f'^2(x_0)}$ (ср. формулу (13)). А тогда

$$\frac{\mu S_\Delta}{|\Delta|} \xrightarrow[|\Delta| \to 0]{} 2\pi f(x_0)\sqrt{1 + f'^2(x_0)}.$$

Хотя мы использовали здесь лишь приближенное выражение для μS_Δ, однако можно показать, что при надлежащем определении площади поверхности вращения полученный результат оказывается точным, т. е. функция $2\pi f\sqrt{1 + f'^2}$ — плотность для μS_Δ. Но тогда сразу получается и формула для μS, а именно

$$\mu S = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1 + f'^2}\,dx.$$

Аналогично, если вращающаяся гладкая кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (a \leqslant t \leqslant b),$$

причем $\psi(t) \geqslant 0$, то можно установить формулу

$$\mu S = 2\pi \int_a^b \psi \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt.$$

Пример. Вычислить площадь поверхности S, получающейся при вращении вокруг оси OX одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Подставляя в предыдущую формулу, получаем

$$\mu S = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2}\, dt.$$

Напоминаем, что выражение для $\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}$, а именно $2a \sin \frac{t}{2}$, было вычислено в примере 2 из предыдущего параграфа. Отсюда

$$\mu S = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2}\, dt.$$

Положим $\cos \frac{t}{2} = u$. Тогда $-\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2}\, dt = du$, а когда t пробегает промежуток от 0 до 2π, u пробегает промежуток от 1 до -1. Следовательно,

$$S\mu = -16\pi a^2 \int_1^{-1} (1 - u^2)\, du = 16\pi a^2 \left(u - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

Упражнения

23. Найти площадь поверхности, полученной при вращении вокруг оси OX участка астроиды

$$x = a \cos^3 t,\quad y = a \sin^3 t\ (a > 0),\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

24. Найти площадь поверхности, полученной при вращении вокруг оси OX участка кривой $y = \sqrt{4x - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

25. Найти площадь поверхности, полученной при вращении вокруг оси OX участка кривой $y = e^{-3x}$, $0 \leqslant x \leqslant +\infty$.

Указание. Искомую площадь представить как предел при $A \to +\infty$ площади той поверхности, которая получится при вращении «конечного» участка данной кривой:

$$y = e^{-3x},\quad 0 \leqslant x \leqslant A.$$

Тогда для искомой площади мы получим выражение с помощью несобственного интеграла:

$$\mu S = 2\pi \int_0^{+\infty} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

§ 8. Некоторые другие приложения определенного интеграла

По той же схеме, по которой мы вывели формулу для площади поверхности вращения, часто решаются различные физические задачи, сводящиеся к вычислению интегралов. Остановимся подробно на задаче о давлении жидкости.

Пусть в жидкость с удельным весом γ вертикально погружена прямоугольная пластинка; размеры пластинки и ее положение относительно поверхности жидкости указаны на рис. 22. Мы считаем, что ось OY направлена вдоль поверхности жидкости. Вычислить давление W жидкости на эту пластинку.

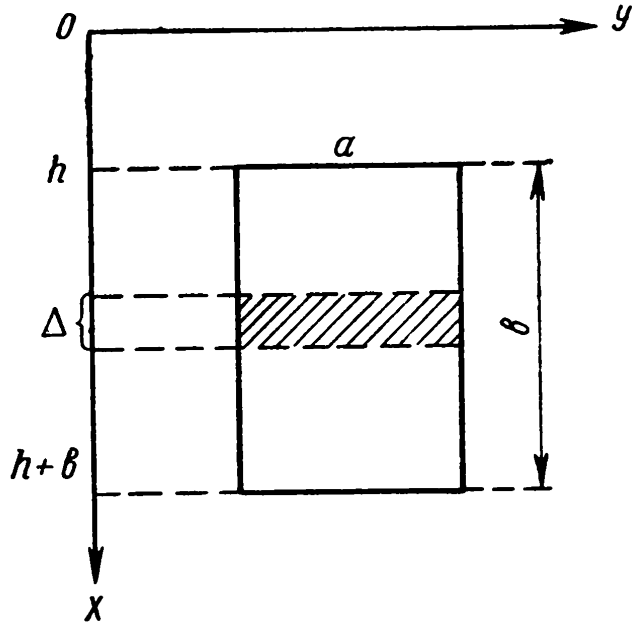

Рис. 22.

Из физики известно, что давление жидкости на какую-нибудь площадку, расположенную на глубине H, равно γHP, где P — площадь данной площадки (мы не указываем единиц, в которых выражаются все эти величины).

Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$ — любой отрезок, содержащийся в $[h, h+b]$, а W_Δ — давление на полоску, заштрихованную на рис. 22, и состоящую из всех тех точек пластинки, которые находятся на глубине между α и β. При малых размерах отрезка Δ можно приближенно считать, что все точки полоски имеют глубину α. Тогда давление W_Δ жидкости на эту полоску находим по следующей приближенной формуле:

$$W_\Delta \approx \gamma\alpha a\,|\Delta|.$$

При этом W_Δ — аддитивная функция отрезка. Стягивая отрезок Δ к точке x, мы найдем, с тем же обоснованием, что и в предыдущем параграфе, что

$$\frac{W_\Delta}{|\Delta|} \to \gamma a x.$$

Таким образом, $\gamma a x$ — плотность для W_Δ. Отсюда сразу следует, что

$$W = \gamma a \int_h^{h+b} x\,dx = \frac{\gamma a}{2} x^2 \Big|_h^{h+b} =$$

$$= \frac{\gamma a}{2}\left[(h+b)^2 - h^2\right] = \frac{\gamma a b}{2}(2h+b) = \gamma a b\left(h + \frac{b}{2}\right),$$

т. е. давление W равно весу столба жидкости, имеющего основанием данную пластинку, а высота которого равна глубине средней линии пластинки.

Лишь немного усложняя проведенное рассуждение, мы можем превратить его в точное.* Действительно, из физических соображений ясно, что W_Δ должно быть больше, чем давление на площадку, находящуюся на глубине α и имеющую ту же площадь, что и заштрихованная на рис. 22 полоска, и меньше давления на такую же площадку, находящуюся на глубине β. Таким образом,

$$\gamma\alpha a\,|\Delta| < W_\Delta < \gamma\beta a\,|\Delta|,$$

или

$$\gamma a\alpha < \frac{W_\Delta}{|\Delta|} < \gamma a\beta.$$

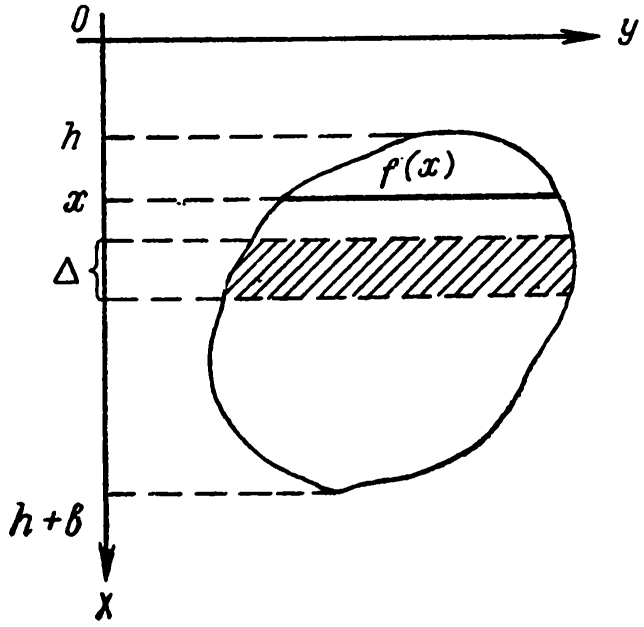

Рис. 23.

В тех же границах заключена и функция γax, если $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Отсюда уже следует, что γax — плотность для W_Δ.

Рассмотрим теперь вместо прямоугольника пластинку произвольной формы (рис. 23). Пусть для каждого $x \in [h, h + b]$ через $f(x)$ обозначена ширина пластинки на глубине x, причем функция f предполагается непрерывной. Пусть, наконец,

$$\Delta = [\alpha, \beta] \subset [h, h + b],$$

и W_Δ — давление жидкости на полоску, заштрихованную на рис. 23. Рассуждая по «приближенной схеме», будем считать, что заштрихованная полоска имеет площадь $f(\alpha)\,|\Delta|$ (здесь полоска заменена прямоугольником) и что ее точки находятся на глубине α. Тогда

$$W_\Delta \approx \gamma\alpha f(\alpha)\,|\Delta|,$$

а при стягивании отрезка Δ к точке x

$$\frac{W_\Delta}{|\Delta|} \to \gamma x f(x).$$

Таким образом, $\gamma x f(x)$ — плотность для W_Δ, а

$$W = \gamma \int\limits_h^{h+b} x f(x)\,dx.$$

Это рассуждение тоже легко превращается в точное, что мы рекомендуем читателю проделать самостоятельно.

Приведем еще одну задачу другого содержания. Пусть требуется вычислить работу A, необходимую для того, чтобы выка-

* В этом отношении задача о давлении проще, чем задача о площади поверхности вращения.

чать воду из котла, имеющего форму полушара с радиусом R (см. рис. 24, на котором изображено сечение котла).

Для любого отрезка $\Delta = [\alpha, \beta] \subset [0, R]$ обозначим через A_Δ работу, которую нужно затратить на выкачивание слоя воды, все частицы которого находятся на глубине между α и β. На рис. 24 заштриховано сечение этого слоя. A_Δ — аддитивная функция отрезка. Примем указанный слой за прямой круговой цилиндр, основанием которого служит сечение котла на глубине α, а высота равна $|\Delta| = \beta - \alpha$. При этом будем считать, что все частицы слоя находятся на одной глубине α. Тогда работа A_Δ будет приближенно равна произведению веса рассматриваемого слоя на глубину его погружения, т. е.

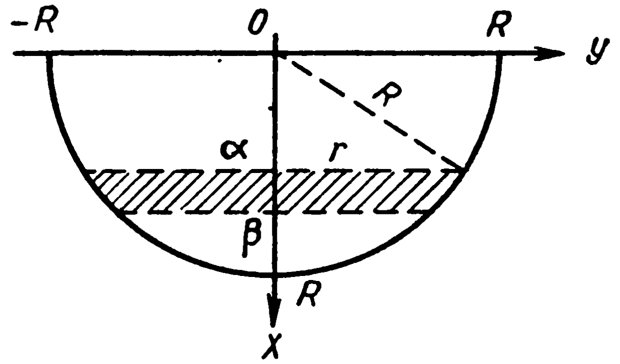

Рис. 24.

$$A_\Delta \approx \pi r^2 \, |\Delta| \, \alpha,$$

где $r = \sqrt{R^2 - \alpha^2}$ — радиус сечения котла на глубине α. При стягивании отрезка Δ к точке x

$$\frac{A_\Delta}{|\Delta|} \to \pi x (R^2 - x^2),$$

т. е. $\pi x (R^2 - x^2)$ — плотность для A_Δ. Отсюда

$$A = \pi \int_0^R (R^2 - x^2)\, x \cdot dx.$$

Вычисляя этот интеграл, находим

$$A = \pi \left(R^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^R = \frac{1}{4} \pi R^4.$$

Как и выше, здесь не указаны единицы, в которых производится вычисление.

Если, например, $R = 4$ *м*, а работа вычисляется в килограммометрах, то поскольку 1 *м*^{3} воды весит 10^3 *кг*,

$$A = 64\pi \cdot 10^3 \text{ кгм}.$$

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. $\frac{33}{2}$. **2.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **3.** $\frac{40}{3}\sqrt{10}$. **4.** $16\sqrt{3} + \frac{20}{3}\sqrt{10} - \frac{143}{12}$. **5.** 48. **6.** $2 + \pi$. **7.** a^2. **8.** $\frac{1}{12}\pi a^2$. **9.** $\pi\sqrt{2}$. **10.** $\frac{16}{15}\pi$. **11.** $\frac{3}{10}\pi$. **12.** $\frac{256}{15}\pi$. **13.** $\frac{3\pi - 4}{3}\pi R^3$. **14.** $K_x = K_y = 36$. **15.** $x_c = y_c = 5$. **16.** $x_c = \frac{5}{2}$; $y_c = \frac{11}{4}$. **17.** $x_c = \frac{4a}{3\pi}$, $y_c = \frac{4b}{3\pi}$. **18.** $\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. **19.** $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4 + \sqrt{17})$. **20.** $\ln \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$. **21.** 3π. **22.** $\ln\frac{\pi}{2}$. **23.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **24.** 16π. **25.** $\frac{\pi}{9} \times [3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})]$.

ГЛАВА V

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 1. Основные определения

В этой главе мы будем рассматривать ряды, членами которых являются не числа, а некоторые функции. Введем сначала понятие функциональной последовательности.

Пусть X — некоторое множество. Если всякому натуральному n поставлена в соответствие некоторая функция f_n, определенная на X, то мы говорим, что на множестве X задана *функциональная* последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Зафиксируем какое-либо $x \in X$ и рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Это — числовая последовательность, n-й член которой есть значение соответствующей функции в точке x. Придавая x различные значения, мы будем получать различные числовые последовательности. Таким образом, одна функциональная последовательность порождает некоторое множество числовых последовательностей.

Пусть при некотором $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится. Тогда мы говорим, что функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится в точке* x. Если последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится во всякой точке $x \in X$, то говорят, что она *сходится на множестве* X.

Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на множестве X. Обозначим через f функцию, определенную на множестве X с помощью равенства

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Эта функция называется *предельной* функцией последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть теперь $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть функциональная последовательность, заданная на множестве X. Выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *функциональным* рядом, а функция $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ — его n-й частичной суммой. Функциональный ряд называется сходящимся на множестве X, если на этом множестве сходится последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ его частичных сумм. Предельная функция S последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *суммой* ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ или } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

§ 2. Равномерная сходимость последовательностей и рядов

Пусть функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет на множестве X предельную функцию f. Тогда для каждого фиксированного $x \in X$ величина $f_n(x)$ при достаточно больших n становится близкой к числу $f(x)$. Однако одна и та же степень этой близости в разных точках x может быть достигнута при различных значениях n. Поэтому возникает следующий вопрос: нельзя ли добиться того, чтобы при достаточно больших значениях n отклонение величины $f_n(x)$ от величины $f(x)$ было бы в некотором смысле сравнимым для различных значений x.

Выразим эту мысль более точно. Сходимость последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к числу $f(x)$ означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при всех $n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ясно, что число N определяется здесь не только выбором ε, но и выбором точки $x \in X$, так как при различных значениях x мы получаем различные числовые последовательности. Можно ли при фиксированном $\varepsilon > 0$ определить N так, чтобы оно «годилось» для всех точек $x \in X$ одновременно? В дальнейшем мы убедимся в том, что ответы на этот вопрос для различных последовательностей могут быть разными. Поэтому приходится различать два случая.

Пусть последовательность

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{1}$$

сходится к функции f на множестве X. Эта последовательность называется *равномерно сходящейся* на множестве X, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всех $n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

одновременно для всех $x \in X$. В противном случае сходимость последовательности (1) называется *неравномерной*.

Неравномерная сходимость последовательности (1) означает, что при некоторых $\varepsilon > 0$ неравенство (2) не может иметь место одновременно при всех x и при всех достаточно больших n. Иначе говоря, для таких ε существуют сколь угодно большие значения n, при которых неравенство (2) не выполнено хотя бы в одной точке множества X.

Пусть последовательность (1) сходится к функции f равномерно на промежутке $[a, b]$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и пусть N таково, что при всех $n > N$ и при всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство (2). Перепишем это неравенство так:

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Это неравенство означает, что график функции f_n при $n > N$ расположен в полосе между графиками функций $f + \varepsilon$ и $f - \varepsilon$ (рис. 25).

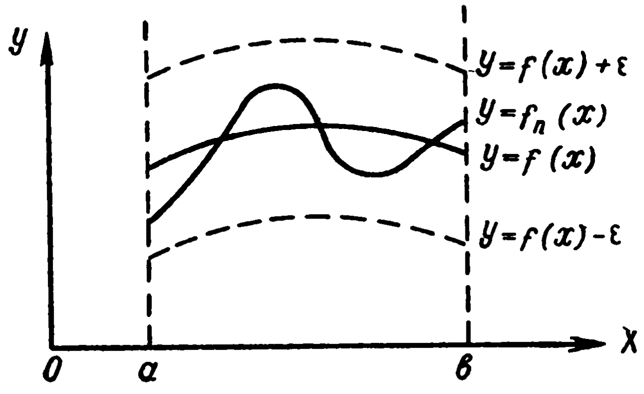

Рис. 25.

Непосредственно из определения вытекает простой признак равномерной сходимости, а именно:

Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на множестве X к предельной функции f. Для того чтобы эта сходимость была равномерной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.\,*$$

Действительно, пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно. Поскольку при любом $\varepsilon > 0$ неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполняется при всех $x \in X$ и при достаточно больших n, то при таких n будет $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, откуда следует, что $\alpha_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Если же условие $\alpha_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ выполнено, то для всякого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n будет $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ и тем более $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и при достаточно больших n.

Рассмотрим теперь функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{3}$$

члены которого определены на множестве X. Этот ряд называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится на этом множестве.

Определение равномерной сходимости ряда можно дать и без привлечения последовательности частичных сумм. Действительно,

* В случае, если функции f_n или f не ограничены, не исключено, что $\alpha_n = +\infty$ для нескольких первых значений n.

из приведенного определения следует, что равномерная сходимость ряда (3) влечет прежде всего его сходимость. Обозначая через S_n и S его частичную сумму и сумму соответственно, будем далее иметь следующее: для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при всех $n > N$

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \text{ при всех } x \in X.$$

Так как $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, а $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, то

$$S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Ряд (3) называется равномерно сходящимся на множестве X, если он, во-первых, сходится и, во-вторых, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad \text{при всех } x \in X.$$

Так как ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ представляет собой остаток ряда (3), то, обозначая его сумму через φ_n, можно определение равномерной сходимости ряда высказать еще и в следующей форме: ряд (3) называется равномерно сходящимся, если последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ его остатков равномерно сходится к нулю.

Признак равномерной сходимости, доказанный нами для последовательностей, применительно к рядам имеет следующий вид.

Для того чтобы ряд (3) *был равномерно сходящимся, необходимо и достаточно*, *чтобы*

$$\beta_n = \sup_{x \in X} |\varphi_n(x)| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Здесь φ_n — остаток ряда.

В заключение отметим, что для обозначения равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ к функции f часто применяется запись

$$f_n \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} f.$$

В качестве примера рассмотрим функциональную последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, определяемую равенством

$$f_n(x) = x^n \text{ для } x \in [0, 1).$$

Ясно, что $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$ при всех $x \in [0, 1)$, так что предельная функция f существует и

$$f(x) = 0 \text{ при всех } x \in [0, 1).$$

Если бы эта последовательность была равномерно сходящейся, то при любом $\varepsilon > 0$ и при достаточно больших n неравенство

$$|x^n - 0| < \varepsilon$$

выполнялось бы при всех $x \in [0, 1)$. Последнее неравенство, очевидно, означает, что $x^n < \varepsilon$. Так как при любом фиксированном n

$$\lim_{x \to 1-0} x^n = 1,$$

то при всяком n можно указать значения $x \in [0, 1)$, для которых $x^n > \frac{3}{4}$. Поэтому при $\varepsilon \leqslant \frac{3}{4}$ неравенство $x^n < \varepsilon$ не может быть выполнено для всех $x \in [0, 1)$ одновременно, каково бы ни было n. Следовательно, мы имеем пример неравномерно сходящейся последовательности.

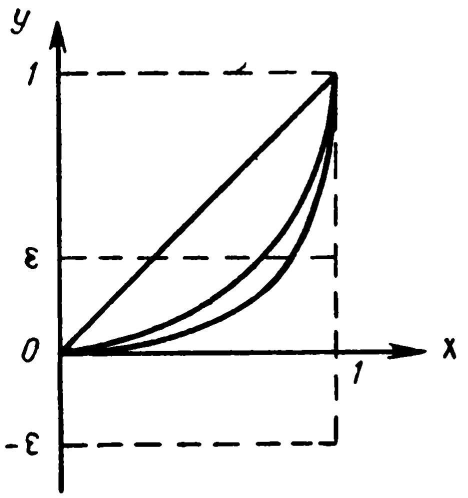

Рис. 26.

Поясним сказанное на рис. 26. График предельной функции представляет собой участок оси x, графики членов последовательности — участки парабол различного порядка. Все эти параболы имеют две общие точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$. В промежутке между этими точками параболы располагаются тем ниже, чем выше их порядок. Однако ясно, что при $\varepsilon < 1$ ни одна из парабол не будет располагаться целиком внутри полосы шириной 2ε, образованной прямыми $y = \pm\varepsilon$, параллельными графику предельной функции.

Исследование данной последовательности на равномерную сходимость можно было бы провести более простым, но и более формальным способом. Именно

$$\alpha_n = \sup_{x \in [0, 1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1)} x^n = 1.$$

Ясно, что условие $\alpha_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ не выполнено, а поэтому сходимость последовательности неравномерная.

Рассмотрим теперь промежуток $[0, a]$, где a — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 < a < 1$. Ясно, что при $x \in [0, a]$ будет $x^n \leqslant a^n$ и потому

$$\sup_{x \in [0, a]} x^n \leqslant a^n.$$

Так как $a^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, то на промежутке $[0, a]$ сходимость оказывается равномерной.

Рассмотрим еще несколько примеров, в каждом из которых требуется произвести исследование функциональной последовательности или функционального ряда на равномерную сходимость.

1. $f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}$, $x\in[0,+\infty)$.

Очевидно, что $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ при всех $x\in(0,+\infty)$. Если же $x=0$, то все члены последовательности обращаются в нуль. Таким образом, предельная функция $f(x)\equiv 0$. Рассмотрим

$$\alpha_n=\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{x}{1+nx^2}-0\right|=\sup_{x\in[0,+\infty)}\frac{x}{1+nx^2}.$$

Дифференцируя функцию f_n, получим

$$f_n'(x)=\frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2}=\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2},$$

и производная обращается в нуль в точке $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Так как $f_n(0)=0$, $f_n(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, а $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>0$, то в точке $\frac{1}{\sqrt{n}}$ функция f_n принимает наибольшее значение. Поэтому

$$\alpha_n=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Следовательно,

$$f_n(x)\rightrightarrows 0 \text{ на промежутке } [0,+\infty).$$

2. $f_n(x)=nx(1-x)^n$, $x\in[0,1]$.

Прежде всего найдем предельную функцию. Очевидно, что при $0<x<1$ будет $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Действительно, в этом случае $0<1-x<1$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}nx(1-x)^n=0$. В точках же $x=0$, $x=1$ все члены последовательности обращаются в нуль, и потому предельная функция также равна нулю. Итак, $f(x)=0$ при всех $x\in[0,1]$. Далее,

$$\alpha_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}|nx(1-x)^n-0|=$$
$$=\sup_{x\in[0,1]}\{nx(1-x)^n\}.$$

Для определения α_n вычислим производную функции $f_n(x)=nx(1-x)^n$:

$$f_n'(x)=n(1-x)^n-n^2x(1-x)^{n-1}=n(1-x)^{n-1}(1-x-nx)=$$
$$=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x].$$

Ясно, что «подозрительной» на экстремум будет точка $x=\frac{1}{n+1}$.

Так как $f_n(0) = f_n(1) = 0$, а $f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) > 0$, то наибольшее значение функции f_n достигается именно в точке $x = \frac{1}{n+1}$. Поэтому

$$\alpha_n = \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1} \neq 0.$$

Итак, равномерной сходимости на промежутке $[0, 1]$ нет.

Рассмотрим теперь промежуток вида $[q, 1]$, где $0 < q < 1$. При достаточно больших n точка $x = \frac{1}{n+1}$ выйдет за пределы такого промежутка, и потому есть основания предполагать, что сходимость на этом промежутке будет равномерной. Действительно, пусть N выбрано так, что $\frac{1}{N+1} < q$. Тогда при $n > N$ тем более будет $\frac{1}{n+1} < q$, и потому функция f_n будет на промежутке $[q, 1]$ убывающей. Поэтому при $n > N$ будет

$$\alpha_n = \sup_{x\in[q,1]} \{nx(1-x)^n\} = nq(1-q)^n.$$

Отсюда следует, что $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т. е. на промежутке $[q, 1]$ сходимость данной последовательности равномерная.

3. $f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

Здесь $f(x) = 0$ при всех $x \in (0, +\infty)$. Рассмотрим

$$\alpha_n = \sup_{x\in(0,+\infty)} \left|\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2} - 0\right| = \sup_{x\in(0,+\infty)} \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}.$$

Так как функция f_n возрастающая, то

$$\alpha_n = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2} = \frac{\pi}{2},$$

и условие $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ не выполнено. Следовательно, сходимость на промежутке $(0, +\infty)$ неравномерная.

Рассмотрим теперь промежуток $(0, A]$, где $A > 0$. Для этого промежутка имеем

$$\alpha_n = \sup_{x\in(0,A]} \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2} = \operatorname{arctg}\frac{A}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, на этом промежутке сходимость равномерная.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(nx+1)(nx+x+1)}$, $x \in (0, +\infty)$.

Прежде всего этот ряд в указанном промежутке сходится. Действительно, это положительный ряд, и

$$\frac{x}{(nx+1)(nx+x+1)} \leqslant \frac{x}{nx \cdot nx} = \frac{1}{n^2 x},$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x}$ сходится. Рассмотрим остаток после n-го члена

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x}{(kx+1)(kx+x+1)}$$

и найдем его сумму $\varphi_n(x)$. Так как

$$\frac{x}{(kx+1)(kx+x+1)} = \frac{1}{kx+1} - \frac{1}{kx+x+1} = \frac{1}{kx+1} - \frac{1}{(k+1)x+1},$$

то для m-й частичной суммы остатка имеем

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{x}{(kx+1)(kx+x+1)} = \left[\frac{1}{(n+1)x+1} - \frac{1}{(n+2)x+1}\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{(n+2)x+1} - \frac{1}{(n+3)x+1}\right] + \cdots +$$

$$+ \left[\frac{1}{(n+m)x+1} - \frac{1}{(n+m+1)x+1}\right] =$$

$$\frac{1}{(n+1)x+1} - \frac{1}{(n+m+1)x+1} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(n+1)x+1}.$$

Таким образом,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{(n+1)x+1}.$$

Теперь ясно, что

$$\beta_n = \sup_{x \in (0,\, +\infty)} |\varphi_n(x)| = \sup_{x \in (0,\, +\infty)} \frac{1}{(n+1)x+1} = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0.$$

Следовательно, данный ряд сходится в промежутке $(0, +\infty)$ неравномерно.

Рассмотрим теперь промежуток $[\gamma, +\infty)$, где $\gamma > 0$. На этот раз

$$\beta_n = \sup_{x \in [\gamma,\, +\infty)} |\varphi_n(x)| = \sup_{x \in [\gamma,\, +\infty)} \frac{1}{(n+1)x+1} = \frac{1}{(n+1)\gamma+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

и сходимость на промежутке $[\gamma, +\infty)$ равномерная.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \quad x \in [0, 1].$

При рассматриваемых значениях x этот ряд является знакочередующимся и сходимость его очевидным образом вытекает из теоремы Лейбница (гл. I, § 6). Для оценки его остатка воспользуемся следствием из этой теоремы:

$$|\varphi_{n-1}(x)| \leqslant \left|(-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

Тогда

$$\beta_{n-1} = \sup_{x \in [0,\, 1]} |\varphi_{n-1}(x)| \leqslant \sup_{x \in [0,\, 1]} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

а так как $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то ряд равномерно сходится в промежутке $[0,\ 1]$.

Упражнения

Исследовать на равномерную сходимость последовательности функций и ряды в указанных промежутках:

1. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$, а) $x \in (0,\ +\infty)$, б) $x \in [\gamma,\ +\infty)$ $(\gamma > 0)$;
2. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$, а) $x \in (0,\ +\infty)$, б) $x \in [\gamma,\ +\infty)$ $(\gamma > 0)$;
3. $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$, $x \in [0,\ +\infty)$; 4. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [0,\ +\infty)$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$, $x \in (0,\ +\infty)$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$, $x \in (0,\ +\infty)$;
7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$, $x \in (-\infty,\ +\infty)$.

§ 3. Признаки равномерной сходимости

Приведем необходимое и достаточное условие равномерной сходимости, аналогичное критерию сходимости Коши.

Теорема 1. *Пусть члены функциональной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ определены на множестве X. Для того чтобы эта последовательность равномерно сходилась на множестве X к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое N, что при любых $n,\ m > N$*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in X.$$

Доказательство. Если последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции f равномерно, то для всякого $\varepsilon > 0$, существует такой номер N, что при всех $n > N$ неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

выполняется сразу для всех $x \in X$. Тогда для любых двух n, $m > N$ будет

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |[f_n(x) - f(x)] + [f(x) - f_m(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

одновременно для всех $x \in X$. Необходимость доказана.

Перейдем к доказательству достаточности. Из выполнения условия теоремы вытекает, что при любом $x \in X$ выполнено необходимое и достаточное условие сходимости числовой последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Поэтому для любого $x \in X$ существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Таким образом, функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на множестве X. Обозначим ее предельную функцию через f и докажем, что сходимость — равномерная. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое N, чтобы при n, $m > N$ было

$$|f_n(x) - f_m(x)| < 0{,}9\varepsilon \text{ при всех } x \in X. \tag{4}$$

Зафиксируем $n > N$ и пусть $m \to \infty$. Переходя к пределу в неравенстве (4), получим

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant 0{,}9\varepsilon \text{ при всех } x \in X,$$

и тем более

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ при всех } x \in X.$$

Так как это неравенство выполнено для всех $x \in X$ и $n > N$, то равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ установлена.

Приведем без доказательства аналогичный результат для рядов.

Т е о р е м а 2. *Пусть члены функционального ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{5}$$

определены на множестве X. Для того чтобы этот ряд был равномерно сходящимся на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что при $n > N$ и любом натуральном p

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \text{ при всех } x \in X.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующего результата для числовых рядов.

Из теоремы 2 вытекает д о с т а т о ч н ы й признак равномерной сходимости.

Т е о р е м а 3 (п р и з н а к В е й е р ш т р а с с а). *Пусть члены функционального ряда* (5) *определены на множестве* X. *Пусть, кроме того, числовой положительный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{6}$$

сходится и при всех n *и* $x \in X$ *выполняется неравенство*

$$|u_n(x)| \leqslant c_n. \tag{7}$$

Тогда ряд (5) *сходится равномерно.*

Так как ряд (6) сходится, то для него выполнено необходимое и достаточное условие сходимости (гл. I, § 1). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое N, чтобы при $n > N$ и любом натуральном p было

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon.$$

Очевидно, что при тех же n и p и при всех $x \in X$ будет

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon.$$

Это значит, что для ряда (5) выполнено условие теоремы 2, а, следовательно, этот ряд сходится равномерно.

З а м е ч а н и е. Заключение теоремы остается в силе, если неравенство (7) выполнено лишь при $n \geqslant n_0$, где n_0 — некоторое число.

Из условия доказанной теоремы вытекает, что ряд (5) сходится абсолютно в каждой точке множества X. Поэтому признак Вейерштрасса оказывается применимым только к абсолютно сходящимся рядам. Ниже мы убедимся в том, что существуют ряды, сходящиеся равномерно, но не абсолютно (см. также пример 5 из § 1).

Рассмотрим примеры.

Исследовать на равномерную сходимость ряды в указанных промежутках:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{2^n}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Очевидно, $\left|\dfrac{\sin nx}{2^n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ при всех $x \in (-\infty, +\infty)$, и, так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ сходится, то на основании признака Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{1+n^5x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

Из неравенства $(1 - n^{5/2}x)^2 \geqslant 0$ следует

$$1 + n^5x^2 \geqslant 2n^{5/2}x.$$

Поэтому

$$\frac{nx}{1 + n^5x^2} \leqslant \frac{nx}{2n^{5/2}x} = \frac{1}{2n^{3/2}},$$

и равномерная сходимость заданного ряда вытекает из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx} - \cos 2nx}{\sqrt[3]{n^4 + x}}$, $x \in [0, +\infty)$.

Ясно, что в указанном промежутке

$$\left| \frac{e^{-nx} - \cos 2nx}{\sqrt[3]{n^4 + x}} \right| \leqslant \frac{|e^{-nx}| + |\cos 2nx|}{n^{4/3}} \leqslant \frac{2}{n^{4/3}}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ сходится, то заданный ряд сходится равномерно.

Упражнения

Исследовать на равномерную сходимость следующие ряды:

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 5nx}{\sqrt{x^4 + n^2}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n^2}$, $x \in [-a, a]$, $a > 0$; 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^3x^2}$, $x \in (0, +\infty)$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1 + x)(1 + 2x) \cdots (1 + nx)}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

§ 4. Функциональные свойства предельной функции и суммы ряда

Здесь мы займемся следующим вопросом. Допустим, что члены сходящейся функциональной последовательности или сходящегося функционального ряда обладают некоторым свойством. Можно ли утверждать, что предельная функция или сумма ряда также обладают этим свойством? Например, если все функции, входящие в последовательность, непрерывны, то будет ли предельная функция непрерывной?

Легко видеть, что ответ на этот вопрос в общем случае может быть отрицательным. Действительно, функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданная на промежутке $[0, 1]$ с помощью равенства $f_n(x) = x^n$, сходится на этом промежутке к разрывной функции

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in [0, 1), \\ 1 \text{ при } x = 1. \end{cases}$$

В то же время все члены последовательности непрерывны.

В приводимых ниже теоремах устанавливаются достаточные условия, при которых некоторые свойства членов функциональной последовательности и функционального ряда переносятся на предельную функцию и на сумму ряда. Кроме того, в этих теоремах содержатся и некоторые дополнительные результаты.

Теорема 4. *Пусть члены последовательности*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{8}$$

определены на промежутке $\langle a, b\rangle$ *и непрерывны на нем. Если последовательность* (8) *сходится равномерно на* $\langle a, b\rangle$, *то ее предельная функция непрерывна на этом промежутке.*

Доказательство. Положим

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Возьмем произвольную точку $x_0 \in \langle a, b\rangle$ и докажем, что функция f непрерывна в этой точке.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. В силу равномерной сходимости последовательности (8) найдется такой номер n_0, что

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при всех } x \in X.$$

Число n_0 зафиксируем и рассмотрим функцию f_{n_0}. Так как эта функция в точке x_0 непрерывна, то для выбранного $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех $x \in \langle a, b\rangle$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, будет

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ясно, что

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \\ + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \frac{2}{3}\varepsilon$$

в силу выбора n_0. Если теперь $x \in \langle a, b\rangle$ таково, что $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то непрерывность f в точке x_0, а, стало быть, и на всем $\langle a,\ b\rangle$ доказана.

Как уже отмечалось, эта теорема дает достаточные условия, при которых предельная функция непрерывна. Однако при дополнительном предположении, именно в случае монотонной последовательности, эта теорема обратима. Иначе говоря, для монотонной последовательности непрерывных функций из непрерывности предельной функции вытекает равномерная сходимость. По этому поводу см. [Ф], т. 2, стр. 77—78.

Теорема 5. *Пусть члены функционального ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{9}$$

определены и непрерывны на промежутке $\langle a,\ b\rangle$. Тогда, если ряд (9) *сходится равномерно на $\langle a,\ b\rangle$, то его сумма на этом промежутке непрерывна.*

Эта теорема легко вытекает из теоремы 4, если применить последнюю к последовательности частичных сумм ряда (9).

Из замечания к теореме 4 легко следует, что теорема 5 обратима в том случае, когда члены ряда (9) — неотрицательные функции.

Введем следующее понятие. Пусть функции f_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ определены и непрерывны на промежутке $[a,\ b]$ и последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на этом промежутке к непрерывной функции f. Если при этом выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{10}$$

то говорят, что *допустим предельный переход под знаком интеграла.*

Отметим, что равенство (10) можно записать и так:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Не следует думать, что равенство (10) очевидно. Так, например, для последовательности

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad x\in[0,\ 1],$$

оно не имеет места. Действительно, при $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x\lim_{n\to\infty} ne^{-nx^2} = x\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{nx^2}} = 0.$$

Если же $x = 0$, то все члены последовательности обращаются в нуль, и потому

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0.$$

Таким образом, на всем промежутке $[0, 1]$ существует предельная функция f, равная тождественно нулю. Следовательно, существует $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$. В то же время

$$\int\limits_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Теорема 6. *Пусть функции f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ определены и непрерывны на промежутке $[a, b]$. Если последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на $[a, b]$, то предельный переход под знаком интеграла допустим.*

Доказательство. Пусть f есть предельная функция для последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. На основании теоремы 4 функция f непрерывна на $[a, b]$. Остается доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Для этого рассмотрим разность

$$\gamma_n = \int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx$$

и докажем, что она стремится к нулю при $n \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно, существует такое N, что при всех $n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ для любого } x \in [a, b].$$

Тогда на основании известных свойств интеграла (см. гл. III, § 1, 7°)

$$\left|\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

при $n > N$. Так как ε произвольно, то это означает, что $\gamma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тем самым доказательство теоремы завершено.

В случае функциональных рядов вместо вопроса о предельном переходе возникает вопрос о почленном интегрировании.

Пусть члены функционального ряда (9) определены и непрерывны на промежутке $[a, b]$ и на всем этом промежутке ряд сходится, причем сумма его U также непрерывна. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)\,dx \tag{11}$$

сходится и имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b U(x)\,dx,$$

то говорят, что *допустимо почленное интегрирование ряда* (9).

Теорема 7. *Пусть члены функционального ряда (9) определены и непрерывны на* $[a, b]$, *и ряд сходится на этом промежутке равномерно. Тогда его можно почленно интегрировать на этом промежутке.*

Доказательство. Пусть $U = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Функция U непрерывна на промежутке $[a, b]$, ибо она является суммой равномерно сходящегося ряда.

Обозначим через S_n частичную сумму ряда (9). По свойствам интеграла имеет место равенство

$$\int_a^b S_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx. \tag{12}$$

Так как последовательность частичных сумм ряда (9) сходится равномерно, то на основании теоремы 6

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b U(x)\,dx.$$

С другой стороны, выражение в правой части (12) представляет собой частичную сумму ряда (11), следовательно, этот ряд сходится и сумма его равна $\int_a^b U(x)\,dx$. Теорема доказана.

В заключение этого параграфа мы остановимся на почленном дифференцировании ряда. При этом для большей простоты изложения мы не будем предварительно разбирать вопрос о предельном переходе под знаком производной.

Итак, пусть члены функционального ряда (9) определены на промежутке $\langle a, b\rangle$ и ряд сходится к сумме U. Допустим, что в некоторой точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ все члены ряда дифференцируемы. Будем говорить, что ряд (9) можно в точке x_0 *дифференцировать почленно, если существует* $U'(x_0)$ и выполняется равенство

$$U'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0).$$

И здесь нам представляется не лишним заметить, что почленное дифференцирование ряда далеко не всегда допустимо.

Теорема 8. *Пусть члены функционального ряда (9) определены и непрерывно дифференцируемы на промежутке* $[a, b]$ *.

* Функция называется непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, если она имеет на этом промежутке непрерывную производную.

Если ряд (9) *сходится на всем* $[a, b]$, *а ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n \tag{13}$$

сходится на этом промежутке равномерно, то почленное дифференцирование ряда (9) *допустимо.*

Доказательство. Пусть, как и выше, $U = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Обозначим через φ сумму ряда (13)

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n.$$

Так как ряд (13) сходится равномерно на промежутке $[a, b]$, то он тем более сходится равномерно на промежутке $[a, x]$, где $x \in [a, b]$. Поэтому его можно почленно проинтегрировать по этому промежутку:

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = U(x) - U(a).$$

Отсюда

$$U(x) = U(a) + \int_a^x \varphi(t)\,dt \tag{14}$$

при всех $x \in [a, b]$. Функция φ непрерывна на $[a, b]$ (как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций). Поэтому функция F, определяемая равенством

$$F(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$$

при $x \in [a, b]$, имеет на всем $[a, b]$ производную, причем $F'(x) = \varphi(x)$. Так как первое слагаемое в правой части (14) есть величина постоянная, то и вся правая часть имеет при любом $x \in [a, b]$ производную, равную $\varphi(x)$. Отсюда следует существование производной U' и равенство

$$U'(x) = \varphi(x)$$

при всех $x \in [a, b]$. Так как $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, то возможность почленного дифференцирования ряда (9) на всем $[a, b]$ установлена.

Рассмотрим примеры.

1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность функций, заданную равенством

$$f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^n} \text{ при } x\in[0,\ 1].$$

Сначала найдем предельную функцию. При $x\in[0,\ 1)$ будет $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Если же $x=1$, то $f_n(x)=\frac{1}{2}$, и потому $f_n(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. Таким образом, предельная функция

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\in[0,\ 1),\\ \frac{1}{2} & \text{при } x=1.\end{cases}$$

Так как предельная функция разрывна, то сходимость последовательности неравномерная. Действительно, предполагая сходимость равномерной, мы получили бы, что предельная функция, как предел последовательности непрерывных функций, сама является непрерывной.

Рассмотрим теперь промежуток $[0,\ 1-\gamma]$, где $0<\gamma<1$. Здесь

$$\alpha_n=\sup_{x\in[0,1-\gamma]}\left|\frac{x^{2n}}{1+x^n}-0\right|=\sup_{x\in[0,1-\gamma]}\frac{x^{2n}}{1+x^n}\leqslant(1-\gamma)^{2n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

и потому сходимость на этом промежутке равномерная.

2. Рассмотрим последовательность

$$f_n(x)=\begin{cases} nx & \text{при } x\in\left[0,\ \frac{1}{n}\right],\\ 2-nx & \text{при } x\in\left(\frac{1}{n},\ \frac{2}{n}\right],\\ 0 & \text{при } x\in\left(\frac{2}{n},\ 1\right].\end{cases}$$

Здесь $f(x)=0$ при всех $x\in[0,\ 1]$. Действительно, при $x=0$ это очевидно. Если же $x\neq0$, то при $n>\frac{2}{x}$ имеем $\frac{2}{n}<x$ и потому $f_n(x)=0$ при всех таких n. Отсюда $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Нетрудно убедиться, что все члены последовательности и ее предельная функция непрерывны. Однако

$$\alpha_n=\sup_{x\in[0,\ 1]}|f_n(x)-0|=\sup_{x\in[0,\ 1]}f_n(x)=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=1$$

и потому сходимость последовательности неравномерная. Этот пример показывает, что условие равномерной сходимости является только достаточным условием для того, чтобы предельная функция последовательности непрерывных функций сама была непрерывной.

3. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{x}e^{-nx}$ в промежутке $[0,\ +\infty)$.

Пусть S — сумма ряда. При $x=0$ имеем $S(x)=0$. Если $x>0$, то этот ряд представляет собой сходящуюся геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{-x} < 1$. Поэтому

$$S(x) = \frac{\sqrt{x}\, e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

Итак,

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \dfrac{\sqrt{x}\, e^{-x}}{1 - e^{-x}}, & \text{если } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

При этом

$$\lim_{x \to +0} S(x) = \lim_{x \to +0} \frac{\sqrt{x}\, e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \lim_{x \to +0} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$$

При вычислении этого предела использовано, что $e^{-x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$, а $1 - e^{-x} \underset{x \to 0}{\sim} x$.

Таким образом, $\lim\limits_{x \to +0} S(x) \neq S(0)$, поэтому сумма ряда разрывна при $x = 0$. Так же как и в примере 1, отсюда следует, что сходимость ряда в промежутке $[0, +\infty)$ неравномерная.

Рассмотрим теперь промежуток $[\gamma, +\infty)$, где $\gamma > 0$. Пусть $u_n(x) = \sqrt{x} e^{-nx}$. Тогда

$$u_n'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - n\sqrt{x}\right) e^{-nx} = \frac{1 - 2nx}{2\sqrt{x}} e^{-nx}.$$

Очевидно, что $u_n'(x) < 0$ при $x > \frac{1}{2n}$. Поэтому на промежутке $\left[\frac{1}{2n}, +\infty\right)$ функция u_n убывает. Если $n \geqslant \frac{1}{2\gamma}$, то $\frac{1}{2n} \leqslant \gamma$, и потому при таких n функция u_n убывает на всем промежутке $[\gamma, +\infty)$. Поэтому при $n \geqslant \frac{1}{2\gamma}$ имеем

$$0 < u_n(x) \leqslant \sqrt{\gamma}\, e^{-n\gamma}.$$

В силу замечания к теореме 3 отсюда следует равномерная сходимость рассматриваемого ряда, ибо числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\gamma} e^{-n\gamma}$ сходится.

4. Установить непрерывность суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(x+n)(x+n+1)}$ $(\alpha > 0)$ в промежутке $[0, +\infty)$.

Так как ряд положительный, то сходимость его в указанном промежутке вытекает из неравенства

$$\frac{x^{\alpha}}{(x+n)(x+n+1)} \leqslant \frac{x^{\alpha}}{n^2}, \tag{15}$$

поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\alpha}}{n^2}$ сходится. Совершенно очевидно также, что члены ряда представляют собой непрерывные функции. Однако равномерная сходимость на всем промежутке не имеет места (при $\alpha \geqslant 1$). Доказательство этого утверждения мы не приводим, так как оно не имеет для нас решающего значения. Впрочем при желании читатель может провести его самостоятельно.

Мы воспользуемся тем фактом, что непрерывность функции на некотором промежутке означает ее непрерывность в каждой точке этого промежутка. Для того же чтобы установить непрерывность предельной функции в какой-нибудь точке достаточно доказать, что последовательность сходится равномерно в промежутке, содержащем внутри себя эту точку. Мы покажем, что рассматриваемый ряд сходится равномерно в любом промежутке $[0, A]$, где A — произвольное положительное число. Действительно, для $x \in [0, A]$ из (15) следует

$$\frac{x^{\alpha}}{(x+n)(x+n+1)} \leqslant \frac{A^{\alpha}}{n^2},$$

и равномерная сходимость ряда на промежутке $[0, A]$ вытекает из признака Вейерштрасса.

Пусть теперь x есть произвольная точка промежутка $[0, +\infty)$. Выберем $A > x$. В силу равномерной сходимости ряда на отрезке $[0, A]$, сумма ряда на этом промежутке непрерывна. В частности, она непрерывна в точке x. Так как $x \in [0, +\infty)$ произвольно, то сумма ряда непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$.

5. Определить область сходимости и установить непрерывность суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^2+1}$.

По признаку сравнения этот положительный ряд сходится при любом $x \neq 0$. Действительно, $\frac{1}{n^2x^2+1} \leqslant \frac{1}{n^2x^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^2}$ сходится, ибо отличается от сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ только постоянным множителем $\frac{1}{x^2}$. При $x = 0$ ряд расходится, ибо его общий член не стремится к нулю. Так как каждый член рассматриваемого ряда представляет собой четную функцию, то и сумма его также четная функция, а потому достаточно установить ее непрерывность только в промежутке $(0, +\infty)$. Для этого докажем, что в каждом промежутке $(a, +\infty)$, где $a > 0$, ряд сходится равномерно. Действительно, при всех $x \in (a, +\infty)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{n^2x^2+1} < \frac{1}{n^2a^2+1},$$

и равномерная сходимость рассматриваемого ряда на промежутке $(a, +\infty)$ следует из сходимости числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2a^2+1}.$$

Принимая во внимание то обстоятельство, что каждый член ряда представляет собой непрерывную функцию, мы можем заключить, что сумма ряда непрерывна в каждой точке промежутка $(a, +\infty)$. С другой стороны, каково бы ни было $x > 0$, можно указать такое $a > 0$, что $x \in (a, +\infty)$. Поэтому сумма ряда непрерывна в любой точке промежутка $(0, +\infty)$.

6. Установить непрерывность суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x}$, в промежутке $[0, 1)$.

Прежде всего отметим, что в указанном промежутке ряд сходится. Действительно, при $x \neq 0$ ряд строго положительный и мы можем применить признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)^x} : \frac{x^n}{n^x} \right) = \lim_{n\to\infty} x \left(\frac{n}{n+1} \right)^x = x.$$

Так как $0 < x < 1$, то ряд сходится. Сходимость же при $x = 0$ очевидна.

Докажем, что ряд сходится равномерно во всяком промежутке $[0, 1-\gamma)$, где $0 < \gamma < 1$. Действительно, для $x \in [0, 1-\gamma)$ имеем оценку

$$\frac{x^n}{n^x} \leqslant (1-\gamma)^n.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\gamma)^n$ представляет собой сходящуюся геометрическую прогрессию. Поэтому равномерная сходимость установлена. Так как для всякого $x \in [0, 1)$ существует γ такое, что $0 < \gamma < 1$ и $x \in [0, 1-\gamma)$, то непрерывность суммы ряда на промежутке $[0, 1)$ может быть установлена так же, как и в предыдущих примерах.

Упражнения

Исследовать на равномерную сходимость:

12. Последовательность $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ в промежутках а) $[0, 1]$, б) $[0, \gamma]$, где $0 < \gamma < 1$;

13. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ в промежутках а) $(0, +\infty)$, б) $[\gamma, +\infty)$, где $\gamma > 0$;

14. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{x} e^{-n\sqrt{x}}$ в промежутках а) $[0, +\infty)$, б) $[\gamma, +\infty)$, где $\gamma > 0$;

15. Определить область сходимости и установить непрерывность суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2+x^2}$.

§ 5. Степенные ряды. Область сходимости

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *степенным*, если члены его определяются по формулам $u_n(x) = c_n(x - x_0)^n$. Здесь c_n — некоторые вещественные постоянные, называемые коэффициентами степенного ряда, а x_0 — фиксированное вещественное число. Степенной ряд обычно записывается в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad \text{или} \quad c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

Ясно, что члены степенного ряда определены на всей оси. Полагая $x - x_0 = y$, придем к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$. Поэтому в дальнейшем мы, как правило, будем предполагать, что $x_0 = 0$.

Итак, рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{16}$$

Областью сходимости этого ряда мы будем называть множество всех тех значений x, при которых он сходится. Очевидно, что степенной ряд (16) сходится при $x = 0$. Нетрудно убедиться в том, что существуют степенные ряды, сходящиеся только в одной точке. В то же время область сходимости степенного ряда может быть и значительно более широкой. Мы предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть ряды $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Применяя к ним признак Даламбера для рядов с членами произвольных знаков, можно легко установить, что первый из них сходится только при $x = 0$, а второй — при всех вещественных x.

Докажем следующую лемму.

Лемма (Абель). *Если степенной ряд* (16) *сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно во всякой точке x_1, удовлетворяющей неравенству $|x_1| < |x_0|$.*

Доказательство. По условию числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$$

сходится. Тогда $c_n x_0^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и тем более $|c_n x_0^n| \leqslant M$ при всех n, где M — некоторое число.

Пусть теперь x_1 таково, что $|x_1| < |x_0|$. Для того, чтобы установить абсолютную сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n, \tag{17}$$

воспользуемся неравенством

$$|c_n x_1^n| = |c_n x_0^n| \left|\frac{x_1^n}{x_0^n}\right| \leqslant M \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n. \tag{18}$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n$ представляет собою геометрическую прогрессию со знаменателем $\left|\frac{x_1}{x_0}\right| < 1$ и потому сходится. Тогда на основании неравенства (18) и первой теоремы сравнения для положительных рядов сходится и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x_1^n|$, т. е. сходится абсолютно ряд (17).

В следующей теореме вопрос об области сходимости степенного ряда получает окончательное решение.

Теорема 9. *Для всякого степенного ряда* (16) *справедливо одно из следующих трех утверждений*:

1) *ряд расходится всюду, кроме* $x = 0$;

2) *существует такое число* $R > 0$, *что при* $|x| < R$ *ряд сходится абсолютно, при* $|x| > R$ *ряд расходится*;

3) *ряд абсолютно сходится на всей оси*.

Доказательство. Если ряд (16) сходится только при $x = 0$, то для него справедливо утверждение 1). Предположим теперь, что область сходимости ряда (16) содержит точки $x \neq 0$, и покажем, что в этом случае справедливо одно из утверждений: 2) или 3).

Пусть $\mathfrak{M}$ состоит из всех тех x, при которых ряд (16) сходится. Допустим сначала, что множество $\mathfrak{M}$ ограничено, и положим

$$R = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \{|x|\}.$$

Покажем, что R обладает всеми свойствами, указанными в 2).

Так как $\mathfrak{M}$ содержит $x \neq 0$, то $R > 0$, а так как $\mathfrak{M}$ ограничено, то $R < +\infty$. Пусть x таково, что $|x| < R$. По свойству точной верхней границы найдется такое $x_0 \in \mathfrak{M}$, что $|x| < |x_0|$. Тогда, на основании леммы Абеля, ряд (16) сходится в точке x

абсолютно. Если же x таково, что $|x| > R$, то $x \bar{\in} \mathfrak{M}$ и, в силу определения множества $\mathfrak{M}$, ряд (16) в точке x расходится.

Пусть теперь множество $\mathfrak{M}$ не ограничено. Покажем, что в этом случае ряд абсолютно сходится на всей оси (т. е. справедливо утверждение 3). Действительно, пусть x — произвольное вещественное число. Так как множество $\mathfrak{M}$ не ограничено, найдется такое $x_0 \in \mathfrak{M}$, что $|x| < |x_0|$. Тогда абсолютная сходимость ряда (16) в точке x снова вытекает из леммы Абеля.

Доказательство закончено.

Нетрудно заметить, что в формулировке доказанной теоремы ничего не говорится о сходимости ряда в точках $\pm R$ (утверждение 2). Это обстоятельство не является недостатком теоремы, а лежит в существе дела. На примерах, приводимых ниже, мы убедимся, что ничего определенного по поводу сходимости ряда в этих точках сказать нельзя. Различные ряды ведут себя в точках $\pm R$ по-разному.

Если для рядов, сходящихся только при $x = 0$, положить $R = 0$, а для всюду сходящихся $R = +\infty$, то доказанную теорему можно формулировать так:

Теорема 9. *Для всякого степенного ряда вида* (16) *существует такое* R $(0 \leqslant R \leqslant +\infty)$, *что* *

1) *при* $|x| < R$ *ряд сходится абсолютно*;

2) *при* $|x| > R$ *ряд расходится.*

Такое R называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Пусть ряд (16) имеет радиус сходимости $R > 0$.** Тогда ряд сходится абсолютно в открытом промежутке $(-R, R)$. Этот промежуток обычно называют *интервалом сходимости*. Область сходимости степенного ряда представляет собою промежуток с концами в точках $\pm R$, но не обязательно открытый (ряд ведь может сходиться и на одном или на обоих концах интервала сходимости). Этот промежуток называется *промежутком сходимости*. Промежуток сходимости заведомо совпадает с интервалом сходимости при $R = +\infty$.

Для определения радиуса сходимости степенного ряда можно пользоваться формулой

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \tag{19}$$

если предел в правой части существует. Эта формула легко выводится с помощью признака Даламбера.

Аналогично, с помощью признака Коши, можно установить формулу

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

---

* При $R = 0$ или $+\infty$ множество точек x, для которых $|x| < R$ или $|x| > R$ (соответственно), будет пустым.

** В дальнейшем мы рассматриваем только такие ряды.

Рассмотрим примеры:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем x и, следовательно, сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geqslant 1$. Поэтому $R = 1$, а промежуток сходимости имеет вид $(-1, 1)$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Здесь

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} : \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

При $x = 1$ получаем сходящийся положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, а при $x = -1$ абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Поэтому промежуток сходимости $[-1, 1]$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Так же, как и в предыдущем примере, $R = 1$. Однако при $x = 1$ получаем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, а при $x = -1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится в силу теоремы Лейбница. Промежуток сходимости здесь $[-1, 1)$.

Упражнения

Определить радиус и промежуток сходимости степенных рядов:

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$; 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n$;

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$, $a > 0$, $b > 0$.

§ 6. Свойства суммы степенного ряда

В этом параграфе мы установим некоторые функциональные свойства степенных рядов. При этом мы будем пользоваться общими теоремами § 4. Прежде всего нам необходимо решить вопрос о равномерной сходимости степенного ряда.

Теорема 10. *Степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{20}$$

сходится равномерно в любом замкнутом промежутке, целиком лежащем в интервале сходимости.

Для доказательства рассмотрим сначала промежуток $[-r, r]$, где r — произвольное вещественное число, удовлетворяющее условию $0 < r < R$, и докажем, что ряд (20) сходится на этом промежутке равномерно. Действительно, при всех $x \in [-r, r]$ имеем

$$|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x|^n \leqslant |a_n| \cdot |r|^n.$$

Так как $r \in (-R, R)$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |r|^n$ сходится. Поэтому на основании признака Вейерштрасса ряд (20) сходится на промежутке $[-r, r]$ равномерно.

Пусть теперь $[a, b]$ — промежуток произвольного вида и $[a, b] \subset (-R, R)$. Тогда легко построить такой промежуток $[-r, r]$ $(r > 0)$, что

$$[a, b] \subset [-r, r] \subset (-R, R).$$

Действительно, достаточно положить $r = \max\{|a|, |b|\}$. Выполнение неравенств $-r \leqslant a$, $b \leqslant r$ очевидно. В то же время $r < R$. По доказанному, ряд сходится в промежутке $[-r, r]$ равномерно. Тем более, сходимость его будет равномерной и в промежутке $[a, b]$.

Итак, мы установили, что во всяком замкнутом промежутке, лежащем в интервале $(-R, R)$, сходимость степенного ряда равномерна. Отсюда, однако, не вытекает, что она будет равномерной и в интервале $(-R, R)$. Действительно, равномерная сходимость нашего ряда на промежутке $[-r, r]$ означает следующее: для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любого $n > N$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| < \varepsilon$$

при всех $x \in [-r, r]$. Зафиксируем теперь некоторое $\varepsilon > 0$ и будем выбирать N для различных промежутков $[-r, r]$. При этом оказывается, что общего для всех этих промежутков значения N может быть и не найдется, ибо этих промежутков бесконечное множество. Поэтому для всего промежутка $(-R, R)$ номер N может и не существовать.

Более того, можно доказать, что если степенной ряд не сводится к многочлену, т. е. среди его коэффициентов имеется бесконечное множество отличных от нуля, и если область его сходимости — открытый промежуток $(-R, R)$ (здесь $0 < R \leqslant +\infty$), то сходимость ряда в этом промежутке обязательно неравномерная. В то же время в любом замкнутом промежутке, содержащемся в п р о м е ж у т к е сходимости степенного ряда, ряд сходится равномерно. В частности, если область сходимости степенного ряда — замкнутый промежуток $[-R, R]$ $(0 < R < +\infty)$, то во всем этом промежутке ряд сходится равномерно. Доказательства этих утверждений мы опускаем.

Т е о р е м а 11. *Сумма степенного ряда во всякой точке интервала сходимости непрерывна.*

Действительно, пусть ряд (20) имеет радиус сходимости R и $x_0 \in (-R, R)$. Выберем $r > 0$ так, чтобы было $|x_0| < r < R$. Тогда $x_0 \in [-r, r]$. Так как члены ряда (20) во всех точках промежутка $[-r, r]$ непрерывны, а ряд на этом промежутке сходится равномерно (теорема 10), то и сумма его на этом промежутке непрерывна. В частности, она непрерывна в точке x_0. В то же время x_0 есть произвольная точка промежутка $(-R, R)$, и потому сумма ряда (20) на всем этом промежутке непрерывна.

В этой теореме, так же как и в предыдущей, можно вместо интервала сходимости говорить о промежутке сходимости. Иначе говоря, если ряд сходится на каком-либо конце интервала сходимости (R конечно), то сумма его на этом конце также будет непрерывна. По этому поводу см. [Ф], т. II, стр. 92.

Из теоремы 11 вытекает теорема о тождестве степенных рядов.

Т е о р е м а 12. *Пусть ряды* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *имеют в промежутке* $(-R, R)$ $(R > 0)$ *одну и ту же сумму. Тогда все коэффициенты этих рядов совпадают, т. е.* $a_n = b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Действительно, полагая в равенстве

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

$x = 0$, сразу же получаем $a_0 = b_0$. Разделим обе части равенства

$$a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

почленно на x (считая $x \neq 0$). Тогда получим

$$a_1 + a_2 x + \cdots = b_1 + b_2 x + \cdots$$

Это равенство установлено нами для всех $x \in (-R, R)$, кроме $x = 0$. Однако, так как его левая и правая части непрерывны (как суммы степенных рядов), то оно будет справедливым и при $x = 0$. Поэтому $a_1 = b_1$. Аналогично доказывается равенство остальных коэффициентов.

Т е о р е м а 13. *Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому замкнутому промежутку, лежащему в интервале сходимости.*

Эта теорема сразу же вытекает из общей теоремы о почленном интегрировании функциональных рядов (теорема 7, § 4) и из теоремы 10 о равномерной сходимости степенного ряда.

Т е о р е м а 14. *Степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости.*

Доказательство. Возьмем $x \in (-R, R)$, где $R > 0$ — радиус сходимости ряда (20), и докажем, что в этой точке почленное дифференцирование ряда допустимо. Выберем r так, чтобы было $|x| < r < R$, и покажем, что на промежутке $[-r, r]$ выполнены условия теоремы 8 из § 4. Для этого достаточно доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \tag{21}$$

сходится на промежутке $[-r, r]$ равномерно, так как выполнение прочих условий этой теоремы очевидно.

Выберем число r_0 так, что $r < r_0 < R$. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n r_0^n|$ сходится, то последовательность $\{|a_n r_0^n|\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена, т. е. существует такое число $M > 0$, что $|a_n r_0^n| \leqslant M$ при всех n. Тогда при $x \in [-r, r]$ имеем

$$|na_n x^{n-1}| = n\left|a_n r_0^n \frac{x^{n-1}}{r_0^n}\right| =$$

$$= \frac{n}{r_0}|a_n r_0^n| \cdot \left|\frac{x}{r_0}\right|^{n-1} \leqslant \frac{n}{r_0} M \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}.$$

Поэтому для установления равномерной сходимости ряда (21) на промежутке $[-r, r]$ достаточно доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{M}{r_0} n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}$ (теорема 3, § 3) или, что то же самое, ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}$. Сходимость же этого ряда вытекает из признака Даламбера. Действительно,

$$\frac{(n+1)\left(\frac{r}{r_0}\right)^n}{n\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{r}{r_0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{r}{r_0} < 1.$$

Итак, почленное дифференцирование ряда (20) в точке x допустимо. Так как x есть произвольная точка промежутка $(-R, R)$, то ряд можно почленно дифференцировать во всем интервале сходимости.

Заметим, что ряд (21), полученный почленным дифференцированием ряда (20), в свою очередь является степенным. Обозначим через R_1 его радиус сходимости. Тогда $R = R_1$. Действительно, из доказанной теоремы следует, что во всякой точке $x \in (-R, R)$ ряд (21) сходится. Поэтому $R \leqslant R_1$. С другой стороны, из неравенства

$$|a_n x^n| \leqslant n|a_n x^n| = |x| \cdot |na_n x^{n-1}|$$

следует, что ряд (20) сходится во всякой точке $x \in (-R_1, R_1)$, и потому $R_1 \leqslant R$.* Таким образом, окончательно имеем $R = R_1$, т. е. *при почленном дифференцировании степенного ряда радиус сходимости остается без изменения.*

Так как степенной ряд (21) можно в свою очередь почленно продифференцировать, причем радиус его сходимости при этом не изменится, то мы имеем следующее утверждение.

Сумма f степенного ряда (20) в его интервале сходимости есть бесконечно дифференцируемая функция, причем при всех натуральных k и при всех $x \in (-R,\ R)$ имеет место равенство

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,a_n x^{n-k}.$$

§ 7. Разложение функций в степенные ряды

Теория степенных рядов получила в математическом анализе широкое развитие главным образом в связи с тем, что члены их представляют собой функции очень простой природы. В частности, большое значение приобретает вопрос о представлении произвольных функций с помощью степенных рядов.

Пусть функция f определена на промежутке $\langle a,\ b\rangle$ и $x_0 \in (a, b)$. Говорят, что эта функция *разлагается в степенной ряд в окрестности точки x_0*, если существует такое число $h > 0$ и такая последовательность чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, что $(x_0 - h,\ x_0 + h) \subset \langle a,\ b\rangle$ и при всех $x \in (x_0 - h,\ x_0 + h)$ имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{22}$$

Если равенство (22) имеет место при всех $x \in \langle a,\ b\rangle$, то говорят, что функция f *разлагается в степенной ряд на всем $\langle a,\ b\rangle$*.

Из теоремы о тождестве степенных рядов вытекает единственность разложения функции в степенной ряд (при фиксированном x_0). Более того, мы покажем, что последовательность чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ может быть точно охарактеризована.

Пусть функция f определена и бесконечно дифференцируема на $\langle a,\ b\rangle$, причем $x_0 \in (a,\ b)$. Ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется *рядом Тейлора* функции f.

* При $R = +\infty$ достаточно доказать только, что $R \leqslant R_1$, ибо отсюда уже следует $R = R_1$.

В дальнейшем мы всюду считаем $x_0 = 0$. В этом случае ряд Тейлора имеет вид

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

Теорема 15. *Пусть функция f определена на $\langle a, b\rangle$ и $0 \in (a, b)$. Если функция f разлагается в степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n \tag{23}$$

в окрестности точки 0, *то она в этой окрестности бесконечно дифференцируема, а ряд* (23) *есть ее ряд Тейлора.*

Доказательство. Допустим, что $h > 0$ таково, что $(-h, h) \subset \langle a, b\rangle$ и при всех $x \in (-h, h)$ имеет место равенство

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots. \tag{24}$$

Ясно, что f бесконечно дифференцируема, как сумма степенного ряда. Полагая в (24) $x = 0$, получим $c_0 = f(0)$. Продифференцируем равенство (24),

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots,$$

и снова положим $x = 0$. Тогда мы найдем, что $c_1 = f'(0)$. В общем случае, дифференцируя равенство (24) n раз, получим

$$f^{(n)}(x) = n!c_n + (n+1)\cdot n\cdot\cdots\cdot 2c_{n+1}x + \cdots,$$

откуда следует, что $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{h!}$.

Остановимся теперь на вопросе о возможности разложения функции в степенной ряд. Из доказанной теоремы следует, что такое разложение может иметь место только для функций, имеющих сходящийся ряд Тейлора. Однако даже при условии сходимости ряда Тейлора сумма его может не совпадать с исходной функцией.

Пусть функция f определена и бесконечно дифференцируема на $\langle a, b\rangle$, причем $0 \in (a, b)$. Тогда при любом $x \in \langle a, b\rangle$ и при всех натуральных n справедлива формула Тейлора с остаточным членом

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x).$$

Первые $(n+1)$ члены правой части представляют собой частичную сумму $S_{n+1}(x)$ ряда Тейлора, и потому *для сходимости ряда Тейлора к исходной функции* (т. е. для того чтобы $S_{n+1}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$) *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$r_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следующая теорема дает достаточные условия, при которых функция разлагается в ряд Тейлора.

Теорема 16. *Пусть f определена и бесконечно дифференцируема на $\langle a, b\rangle$, причем $0 \in (a, b)$. Если существует такое число $K > 0$, что при всех n и всех $x \in \langle a, b\rangle$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| \leqslant K$, то f разлагается в ряд Тейлора на всем $\langle a, b\rangle$.*

Доказательство. Проверим выполнение условия $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Для этого возьмем остаточный член $r_n(x)$ в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x).$$

В силу условия теоремы справедлива оценка

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{K}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Для того чтобы доказать, что $\frac{|x|^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при любом x, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$. Применяя к нему признак Даламбера, убедимся, что он сходится, ибо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x|^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Остается заметить, что общий член сходящегося ряда стремится к нулю. Итак, $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и теорема доказана.

§ 8. Разложение в ряд Тейлора некоторых конкретных функций

1. Прежде всего рассмотрим основные тригонометрические функции $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$. Для первой из них при всех n имеем

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

и $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ при всех n и $x \in (-\infty, +\infty)$. Используя уже известные значения для коэффициентов ряда Тейлора (см. [Ф], т. I, стр. 191), на основании теоремы 16 предыдущего параграфа получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,$$

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

Аналогично

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

2. Для того чтобы установить разложение функции $f(x) = e^x$, поступим следующим образом. Здесь при всех n

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

и на всей оси ограниченности производных нет. Пусть H — произвольное вещественное число. Ясно, что при всех $x \in [-H, H]$ и при всех n имеет место неравенство

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant e^H,$$

и потому наша функция на промежутке $[-H, H]$ разлагается в ряд Тейлора. Само разложение имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{25}$$

(см. там же). Нетрудно убедиться, что равенство (25) также выполняется на всей оси, ибо для любого вещественного x существует промежуток $[-H, H]$ такой, что $x \in [-H, H]$.

3. Для того чтобы получить разложение функции $f(x) = \ln(1 + x)$, применим искусственный прием. Пусть функция φ определяется равенством $\varphi(t) = \frac{1}{1+t}$ при $t \in (-1, 1)$. Рассматривая ее как сумму геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $-t$, получим

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \cdots, \tag{26}$$

$$t \in (-1, 1).$$

Проинтегрируем почленно это равенство по промежутку $[0, x]$, где x — произвольное число из промежутка $(-1, 1)$. Такая операция законна, ибо $[0, x] \subset (-1, 1)$, а правая часть (26) представляет собою степенной ряд. Тогда получим

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \cdots + (-1)^{n-1} \int_0^x t^{n-1} dt + \cdots$$

или

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

Можно доказать, что это разложение справедливо также и при $x = 1$, т. е. имеет место равенство

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots.$$

4. Подобным же образом можно получить разложение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Действительно, функция $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ при $t \in (-1, 1)$ разлагается в геометрическую прогрессию со знаме-

нателем $-t^2$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots.$$

После интегрирования этого равенства по промежутку $[0, x]$, где $x \in (-1, 1)$, получим

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

Это разложение имеет место также и в точках $x = \pm 1$.

5. Рассмотрим, наконец, функцию $f(x) = (1+x)^m$ и докажем, что она представляет собой сумму биномиального ряда

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n. \tag{27}$$

Для этого найдем сначала радиус сходимости этого ряда, воспользовавшись формулой (19) из § 5. Имеем

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} : \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n-m} \right| = 1.$$

Обозначим, далее, сумму ряда (27) через φ_m и составим дифференциальное уравнение для ее определения. Дифференцируя почленно равенство

$$\varphi_m(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1),$$

получим

$$\varphi_m'(x) = m + \frac{m(m-1)}{1!}x + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots =$$

$$= m\left[1 + (m-1)x + \cdots + \frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots\right] =$$

$$= m\varphi_{m-1}(x)$$

(здесь в квадратных скобках стоит биномиальный ряд, который получается из (27) заменой m на $m-1$). Покажем, что

$$(1+x)\varphi_{m-1}(x) = \varphi_m(x). \tag{28}$$

Действительно,

$$(1+x)\varphi_{m-1}(x) = 1 + (m-1)x + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{n!}x^n + \cdots + x + (m-1)x^2 + \cdots + \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n + \cdots$$

Складывая члены с одинаковыми степенями x, получим

$$(1+x)\varphi_{m-1}(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$$

т. е. равенство (28). Поэтому

$$\varphi_m'(x) = \frac{m}{1+x}\varphi_m(x),$$

откуда

$$\frac{\varphi_m'(x)}{\varphi_m(x)} = \frac{m}{1+x}.$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\ln \varphi_m(x) = m\ln(1+x) + \ln C,$$

или

$$\varphi_m(x) = C(1+x)^m.$$

Так как $\varphi_m(0) = 1$, то и $C = 1$. Таким образом, нами установлено равенство

$$(1+x)^m = 1 + mx + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-1,\ 1).$$

Можно показать, что это равенство также имеет место и в точках $x = \pm 1$, однако не при всех значениях m. Именно для $x = 1$ оно выполняется при $m > -1$, а для $x = -1$ при $m > 0$.

Рассмотрим примеры.

Разложить данную функцию в степенной ряд в окрестности указанной точки a:

1. $f(x) = \frac{1}{x+3}$, $a = 1$.

При решении этой задачи воспользуемся равенством

$$\frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n, \quad q \in (-1,\ 1).$$

Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{x-1+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}$$

и положим $q = \frac{x-1}{4}$. Тогда получим

$$f(x) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n.$$

Это разложение имеет место для всех x, для которых выполняется неравенство $\left|\frac{x-1}{4}\right| < 1$, откуда $|x-1| < 4$, или $-3 < x < 5$.

2. $f(x) = e^x$, $a = 2$.

Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$e^x = e^{(x-2)+2} = e^2 e^{x-2}.$$

Полагая $x - 2 = t$, получим

$$e^x = e^2 e^t = e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} = e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}$$

при всех $x \in (-\infty, +\infty)$

3. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $a = 0$.

Для того чтобы разложить эту функцию в ряд Тейлора, построим сначала разложение для ее производной. Так как $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}$, то для ее разложения можно использовать биномиальный ряд

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}(x^2)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad x \in (-1, 1).$$

Интегрируя это равенство по промежутку $[0, y]$, где $y \in (-1, 1)$, и замечая, что $f(0) = 0$, получим

$$f(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{y^{2n+1}}{2n+1},\quad y \in (-1, 1).$$

4. $f(x) = \cos^2 3x$, $a = 0$.

Преобразуем данную функцию к виду

$$\cos^2 3x = \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x$$

и воспользуемся разложением для $\cos x$. Тогда получим при всех $x \in (-\infty, +\infty)$

$$f(x) = \cos^2 3x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(6x)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6^{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Упражнения

Разложить данную функцию в степенной ряд в окрестности указанной точки a:

19. $f(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$, $a = 0$;

20. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$, $a = -4$;

21. $f(x) = \sin(x - 1)$, $a = 3$;

22. $f(x) = e^{x^2-2}$, $a = 0$;

23. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$;

24. $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1 + x^2}$, $a = 0$.

Рассмотрим теперь несколько примеров, в которых требуется решить обратную задачу, т. е. по заданному ряду определить его сумму.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Прежде всего найдем радиус сходимости данного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2n-1}\right| = 1.$$

Пусть $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in (-1, 1)$ и вычислим

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

Тогда

$$S(x)=\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x\in(-1,\ 1),$$

$$\text{т. е.}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

Как и в предыдущем примере, нетрудно убедиться, что радиус сходимости этого ряда равен 1. Пусть $S(x)$ его сумма. Представим ее в следующем виде:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}=x\varphi(x),$$

где положено $\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$. Пусть $x\in(-1,\ 1)$. Тогда

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2t^{n-1}\right)dt=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Пусть $\psi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$. Эту функцию, так же как и $S(x)$, преобразуем к виду

$$\psi(x)=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=x\eta(x),$$

где $\eta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

Положим $\theta(x)=\int\limits_0^x \eta(t)\,dt$. Тогда

$$\theta(x)=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}.$$

И здесь $x\in(-1,\ 1)$.

Теперь мы можем перейти к определению функции $S(x)$. Прежде всего

$$\eta(x)=\theta'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}.$$

откуда

$$\psi(x) = x\eta(x) = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

Далее находим

$$\varphi(x) = \psi'(x) = \frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{x+1}{(x-1)^3},$$

и, наконец,

$$S(x) = x\varphi(x) = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}, \quad x \in (-1, 1).$$

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!}$.

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} x^n$ и вычислим его сумму $S(x)$. Тогда для нахождения суммы исходного ряда достаточно найти $S(2)$.

Вычислим радиус сходимости указанного степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n!} : \frac{n+2}{(n+1)!}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n+2} = +\infty.$$

Далее,

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} t^n\right) dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} =$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда $S(x) = e^x(1+x)$ и $S(2) = 3e^2$.

Упражнения

Найти суммы рядов:

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$; 26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$;

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$; 28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. а) Неравномерно, б) равномерно. **2.** а) Неравномерно, б) равномерно. **3.** Равномерно. **4.** Неравномерно. **5.** Неравномерно. **6.** Неравномерно. **7.** Равномерно. **8.** Равномерно. **9.** Равномерно. **10.** Равномерно. **11.** Равномерно. **12.** а) Неравномерно, б) равномерно. **13.** а) Неравномерно, б) равномерно. **14.** а) Неравномерно, б) равномерно. **15.** Ряд сходится на всей оси. **16.** $R = 5$, $[-5,5)$.

17. $R = \frac{1}{3}$, $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. **18.** $R = \max\{a, b\}$, $(-R, R)$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n - 1}{n} x^n, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

20. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n, \; x \in (-6, -2)$.

21. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-3)^k, \; x \in (-\infty, +\infty)$,

$$\text{где } a_k = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{\sin 2}{(2n)!} & \text{при } k = 2n, \\ (-1)^n \dfrac{\cos 2}{(2n+1)!} & \text{при } k = 2n+1. \end{cases}$$

22. $e^{-2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, \; x \in (-\infty, +\infty)$.

23. $2 + \frac{1}{2^2}(x-4) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}} (x-4)^n$,

$$0 \leqslant x \leqslant 8.$$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}, \; |x| \leqslant 1$. **25.** $\frac{2}{(1-x)^3}, \; |x| < 1$.

26. $2x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2), \; |x| \leqslant 1$.

27. $2(1 - \ln 2)$. **28.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

СОДЕРЖАНИЕ